Chapitre 10 : continuité des fonctions.

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Dans la suite, les intervalles sont supposés ouverts et non vides, c'est-à-dire de la forme $]a; b[$ avec $a < b$ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

1 Limites

1.1 Notion de Voisinage

Définition

- Un **voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert qui contient x_0 ;
- un **voisinage** de $+\infty$ est un intervalle de la forme $]M; +\infty[$ (avec $M \in \mathbb{R}$) ;
- un **voisinage** de $-\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty; M[$ (avec $M \in \mathbb{R}$).

On dit qu'une propriété est vérifiée au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe *un* voisinage de x_0 dans lequel la propriété est vérifiée. On dit alors que la propriété est **locale** (en x_0), par opposition aux propriétés **globales** qui sont vraies partout.

Exemples :

a) $x^2 - 2$ est négatif au voisinage de 0 car

b) $\frac{1}{x}$ est inférieur à $0,01$ au voisinage de $+\infty$ car

c) sin n'est pas nulle au voisinage de 0 car

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ c'est une propriété globale (donc c'est aussi une propriété locale partout).

Remarques :

— Le rôle de $\forall$ est (comme toujours) crucial.

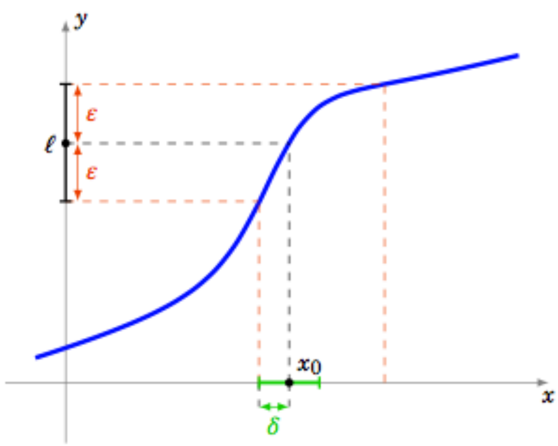
— Pour construire un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre

1.2 Limite (finie ou infinie) en x_0

Définition

Soit I, un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.



Remarque : on peut reformuler en termes de distance et de voisinage.

- Pour tout voisinage V de ℓ il existe un voisinage de x_0 envoyé dans V ;
- on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ qu'on veut en prenant x suffisamment proche de x_0.

Définition

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 lorsque :

  On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 lorsque :

  On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemples :

1. Montrons que $x^2 \underset{x \to 2}{\longrightarrow} 4$, c'est-à-dire que :

   Soit $\varepsilon > 0$. On veut rendre $|x^2 - 4|$ inférieur à ε.
   On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x^2 - 4| = |x-2||x+2|$; pour $x \in]1;3[$ on a $|x^2 - 4| \leq 5|x-2|$.

   Si on pose $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$ pour tout x qui vérifie $|x-2| \leq \delta$ on a $|x^2 - 4| \leq 5 \times \frac{\varepsilon}{5} \leq \varepsilon$.

2. Montrons que $\frac{5x+2}{\sqrt{x-3}} \underset{x \to 3}{\longrightarrow} +\infty$, c'est-à-dire :

3. Montrons que $\lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en 2 :

1.3 Limites à gauche et à droite en x_0

Soit I, un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition

- On dit que f admet une limite à droite en x_0 si la restriction de f à $]x_0; +\infty[\cap I$ admet une limite en x_0. On la note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.
- On dit que f admet une limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $]-\infty; x_0[\cap I$ admet une limite en x_0. On la note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

Exemples : $\lim\limits_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor =$; $\lim\limits_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor =$

Proposition
Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Définition
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f qui admet des limites à gauche et à droite en x_0 mais qui n'est pas définie en x_0. Si les limites à gauche et à droite en x_0 coïncident alors on dit que f admet cette limite commune comme limite en x_0 et on la note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

1.4 Limite (finie ou infinie) en $\pm\infty$

Remarque : pour simplifier, on va donner les définitions et les illustrations pour les limites en $+\infty$. Soit I un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.

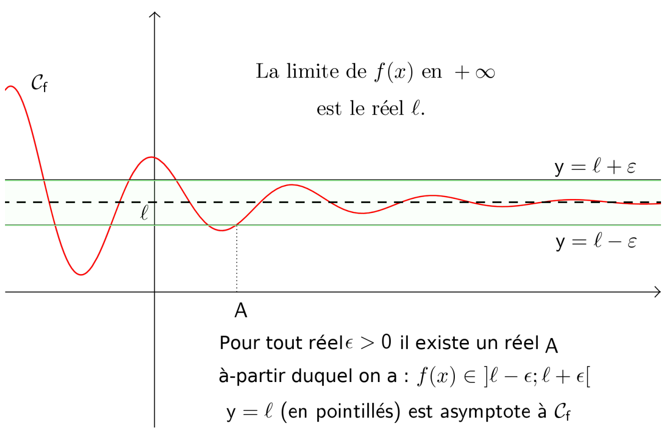
Définition

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.



Exemple : Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

2 Manipuler des limites

2.1 Premières propriétés sur les limites

Les propriétés qui suivent sont « de bon sens », ce qui ne vaut pas démonstration ! Plusieurs d'entre elles sont très proches des résultats vus sur les suites, leurs démonstrations sont basées sur les mêmes arguments mais adaptés au contexte des fonctions, on les laisse en exercice.

Proposition
Si une fonction admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors cette limite est unique.

Proposition
Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition
Soit I, un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Si f admet une limite en x_0 alors $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Démonstration
f est définie en x_0 puisque $x_0 \in I$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe alors cette limite est nécessairement finie. En effet, l'image de tout voisinage de x_0 contient $f(x_0)$ et donc n'est pas contenu dans un voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ qui ne contient pas $f(x_0)$.
Supposons donc que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Si $\ell \neq f(x_0)$ on pose $\varepsilon = \frac{|f(x_0)-\ell|}{2}$ et soit alors δ tel que, $\forall x \in I$, $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Ceci est absurde pour $x = x_0$: on obtient $|f(x_0) - \ell| \leq \frac{|f(x_0)-\ell|}{2}$.
On a donc bien $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ■

Proposition
Caractérisation de la limite en $x_0 \in \mathbb{R}$ avec les limites à gauche et à droite.

- <u>Cas où f est définie en x_0</u> :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$$

- <u>Cas où f n'est pas définie en x_0</u> :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$$

Remarque : le second point de la dernière proposition correspond à une reformulation de la généralisation de la notion de limite au cas où $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ qu'on a fait au paragraphe 1.3.

Proposition
Soit f et g des fonctions qui admettent des limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a :

$$\Longrightarrow \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)\right)$$

En particulier :

Démonstration
On se limite à prouver le cas particulier (le cas général s'en déduit par soustraction).

Remarques :

a) attention, c'est faux avec des inégalités strictes. Un contre exemple :

b) On a, par contre, une « quasi-réciproque » avec des inégalités strictes :

2.2 Opérations sur les limites

La situation est, à nouveau, analogue au contexte des suites pour la somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient de deux fonctions. En particulier, on a la même liste de Formes Indéterminées (c'est-à-dire des calculs qui n'ont pas de sens) :

$$\text{« } \infty - \infty \text{ »} \quad ; \quad \text{« } \frac{?}{0} \text{ »} \quad ; \quad \text{« } 0 \times \pm\infty \text{ »} \quad ; \quad \text{« } \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ »} \quad ; \quad \text{« } 1^{\infty} \text{ »}$$

Remarque : là encore, les démonstrations s'adaptent, on en fera une en TD.

Proposition (Composition des limites)
Soit a, b, c des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit deux fonctions f admettant une limite en a et g admettant une limite en b. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f\ (x) = c$.

Démonstration
Soit V_c un voisinage de c.

$\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, il existe donc

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, il existe donc

Finalement, $\forall x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, Une conséquence importante du résultat précédent :

Proposition
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite dont la limite est $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit f une fonction ayant une limite en ℓ. Alors, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to\ell} f(x)$.

Remarques :
- c'est bien une conséquence de la composition des fonctions car on s'y ramène en introduisant $g : x \longmapsto u_{\lfloor x \rfloor}$.
- Les limites de fonctions permettent donc de déduire des limites de suites. Mais réciproquement, peut-on se servir de suites pour étudier les limites de fonctions ?

2.3 Résultats permettant de prouver l'existence (ou l'absence) d'une limite

Théorème (Caractérisation séquentielle des limites)
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a :

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{Pour toute suite } u \text{ d'éléments de } \mathcal{D}_f \\ \text{telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ alors } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\end{array}\right)$$

Remarque : Le résultat précédent sert dans les démonstrations ; il est également utile en exercice pour prouver l'absence de limite. Par exemple, sin n'admet pas de limite en $+\infty$ car $\sin(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Théorème (de la Limite Monotone)
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;b[$ avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Si f est croissante sur $]a;b[$ alors :

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe. De plus, si f est minorée cette limite est finie ; sinon elle vaut $-\infty$.
- Pour tout $x_0 \in]a;b[$, les limites à gauche et à droite en x_0 existent et sont finies. De plus, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe. De plus, si f est majorée cette limite est finie ; sinon elle vaut $+\infty$.

Remarque : Si f est décroissante alors $-f$ est croissante ; on déduit ainsi un énoncé analogue pour les fonctions décroissantes.

Proposition (Prouver une limite à l'aide de comparaisons)
- Soit f et g des fonctions telles que $f \leq g$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- *Théorème des gendarmes :*

3 Continuité et Applications

3.1 Définitions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction définie sur I (sauf, peut-être, en un point mais alors c'est précisé).

Définition
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 lorsque f admet une limite en x_0.
D'après ce qu'on a vu précédemment, cette limite est alors finie et vaut $f(x_0)$.

Remarques :

a) Si on formule avec des quantificateurs, f est continue en x_0 si, et seulement si :

b) f est continue en x_0 si, et seulement si, la courbe de f n'admet pas de « trou » en x_0.

Exemples : ci-dessous, f est continue en x_0, g et h ne le sont pas.



Définition
Soit x_0 un élément de I. On dit que :
- f est continue à gauche en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0^- qui vaut $f(x_0)$.
- f est continue à droite en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0^+ qui vaut $f(x_0)$.

Exemples : ci-dessous, f est continue à gauche mais pas à droite en x_0, g admet des limites à gauche et à droite en x_0 mais n'est pas continue en x_0, h admet des limites finies à gauche et à droite en x_0 mais h n'est pas définie en x_0.



Définition
Soit $x_0 \in I$. Si f n'est pas définie en x_0 mais que f est continue à gauche et à droite en x_0 et que ces limites coïncident alors

De façon analogue, si x_0 est une borne de I (mettons la borne inférieure), alors on peut prolonger f par continuité en x_0 lorsque

Exemples : ci-dessous, f se prolonge par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = 2$, g est définie sur $]x_0; +\infty[$ et se prolonge par continuité en x_0, h ne se prolonge pas pas continuité en x_0.

Exercice
Soit $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$. Peut-on prolonger f sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue ?

Réponse
La fonction f est définie

Définition
On dit que f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarques :

a) La continuité en un point est une notion locale, on vient de la rendre globale en demandant qu'elle soit localement vraie partout.

b) f est continue sur I si, et seulement si, le graphe de f se dessine sans lever le stylo de la feuille.

3.2 Prouver qu'une fonction est/n'est pas continue

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Méthode (Pour décider si f est continue en x_0)

1. on étudie les limites de f à gauche et à droite en x_0.
2. f est continue en x_0 si, et seulement si, trois conditions sont réunies :
   i. les limites existent et sont finies ;
   ii. les limites coïncident ;
   iii. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Exercice
Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que que la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ \alpha \text{ si } x = 0 \\ x^3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ soit continue en 0 ?

Réponse
Représentons la courbe de f :

Proposition
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles.

i $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire :

ii $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par produit :

iii Soit $x_0 \in I$, f, g des fonctions continues en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

iv Si $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ alors

Théorème (Liste non-exhaustive de fonctions continues)
- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- exp, cos, sin, Arctan sont continues sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+}$;
- ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$;
- tan est continue sur les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- Arccos et Arcsin sont continues sur $[-1; 1]$.

Méthode (Pour montrer que f est continue sur I)
On « déconstruit » f pour se ramener à des fonctions de références (qui sont donc continues, presque partout). S'il y a des points ambigus, on les étudie spécifiquement avec les limites.

Exemple : soit $f(x) = \frac{\cos(x^2+3x+1)}{x^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 1 > 0$ et donc $f(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions continues.

3.3 Image d'une suite convergente par une fonction continue

Les fonctions continues ont des propriétés qui découlent de ce qui a été vu sur les limites (par exemple : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel). Une de ces propriétés est souvent utile :

Proposition

3.4 TVI et conséquences

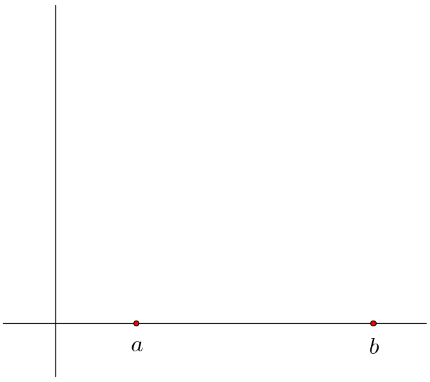
Théorème (Théorème des Valeurs intermédiaires)
Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$

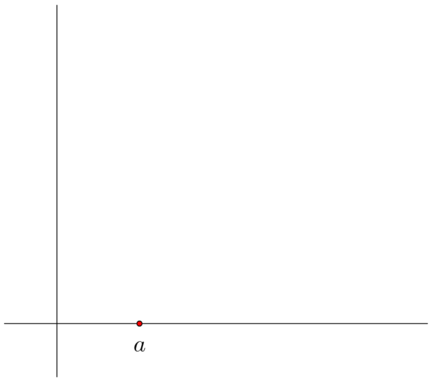
Démonstration
Supposons que $f(a) < f(b)$ et soit $u \in [f(a); f(b)]$. Montrons que $f(x) = u$ a une solution (au moins) dans $[a;b]$.
On applique la méthode de la dichotomie.
Posons $(a_0; b_0) = (a; b)$; puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = u$ on a trouvé une solution à $f(x) = u$;
- si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < u$ on pose $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\quad ; \quad)$;
- si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > u$ on pose $(a_{n+1}; b_{n+1}) = (\quad ; \quad)$;

On suppose qu'on n'a jamais trouvé de solution à $f(x) = u$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ.
Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(a_n) \leq u \leq f(b_n)$.
Par passage à la limite, la fonction f étant continue, on a $f(\ell) \leq u \leq f(\ell)$ et donc $f(\ell) = u$.
Il est clair que $\ell \in [a;b]$ donc on a bien trouvé une solution à $f(x) = u$ dans $[a;b]$.

Remarque : le théorème se généralise sans difficulté à un intervalle ayant une borne ouverte, on remplace alors l'image de la borne par la limite correspondante (qui doit exister, c'est une hypothèse supplémentaire.)
Exemples : à gauche, il existe 3 solutions à $f(x) = 1$ dans $[a;b]$. À droite, f est définie et continue sur $]a;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. L'équation $f(x) = k$ a donc au moins une solution dans $]a;+\infty[$ pour tout $k \in$





Exercice
Justifier qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle. Que dire d'un polynôme de degré pair ?

Réponse
Une fonction polynômiale $P(x)$ est

Proposition

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais qui n'est pas nécessairement de la même nature.
- L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

Exemples : ci-dessous, l'image d'un intervalle ouvert est ouvert, puis fermé ; l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.



Remarque : un intervalle fermé borné s'appelle aussi un **segment**.

Proposition
Une fonction continue sur un segment atteint ses bornes.

Remarque : c'est juste un reformulation de la proposition qui précède (mais elle est utile).

Proposition (TVI amélioré)

Proposition
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone. Alors :

i. f réalise une bijection de I sur $f(I)$;
ii. $f(I)$ est un intervalle de même nature que I ;
iii. les bornes de $f(I)$ sont les images des bornes de I ;
iv. la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$, de même stricte monotonie que f.

Exemple : soit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 1[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; 1[$ vers $[f(0); f(1)[= [1; 1 + \mathrm{e}[$.

4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction définie au voisinage de a et qui prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition
On dit que f admet pour limite le complexe ℓ quand x tend vers a lorsque :

On note alors :

Proposition

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \quad \Longleftrightarrow$$

Définition
Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Remarque : pourquoi, ne précise-t-on pas que la limite doit être finie ?

On prolonge aux fonctions à valeurs complexes les limites à gauche et à droite, le prolongement par continuité, la continuité sur un intervalle.

Définition
On dit que f est bornée au voisinage de x_0 lorsque :

Proposition
Si f est continue en x_0 alors