Chapitre 11 : Polynômes

Remarque : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est le **corps des scalaires** dans lequel on va prendre les coefficients des polynômes.

1 Polynômes à une indéterminée sur le corps $\mathbb{K}$

Définition
On appelle **polynôme** sur $\mathbb{K}$ toute expression de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}$ sont les **coefficients** de P.
X est appelée l'**indéterminée** ; on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : un polynôme est donc défini par la suite finie $(a_0, \ldots, a_n)$ et donc deux polynômes sont égaux si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux.

Définition
On considère $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- On dit que P est le **polynôme nul** lorsque : .
  On le note 0 (ou $0_{\mathbb{K}[X]}$ si on veut insister sur la différence avec $0_{\mathbb{K}}$).
- Si $P \neq 0$, on appelle **degré** du polynôme P le plus grand indice dont le coefficient est non nul ; on le note $\deg(P)$.
- On pose $\deg(0) = -\infty$.
- On dit que P est un **polynôme constant** lorsque
- Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n :
  $$\mathbb{K}_n[X] =$$
- Lorsque $P \neq 0$, le **coefficient dominant** de P est
- On dit que P est **unitaire** lorsque
- On dit que P est un **monôme** (de degré d) si P est de la forme

Exemples :

$\deg\left(X^4 - 5X^3 + 9i\right) =$	Un polynôme unitaire :
$\deg\left(0.X^3 - 3X + X^2\right) =$	Un monôme qui n'est pas un polynôme unitaire :
$\deg\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k!X^{2k}\right) =$	

Remarques :

a) Poser $\deg 0 = -\infty$ sert à rendre consistantes dans le cas particulier du polynôme nul des propriétés que l'on verra plus loin. Cela assure également que $0 \in \mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On fera la confusion entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_0[X]$.

c) Soit P un polynôme de degré d : $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$.

Posons pour tout $k > d, a_k = 0$. On a alors $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Cette "astuce" va nous servir dans la définition ci-dessous.

Définition
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$: $P = \sum_{k=0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0} b_k X^k$. On définit les opérations classiques d'addition, multiplication par un nombre, produit (de polynômes) et composition :

$$P + Q =$$

$$\lambda . P =$$

$$P \times Q =$$

$$P \circ Q =$$

Exemple : on considère $P = X^2 - 3X + 5$ et $Q = X^3 - 1$. Calculer les polynômes :

$P + Q =$

$P \times Q =$

$P \circ Q =$

$Q \circ P =$

Remarques :

a) Lorsque $Q = X$ on a $P \circ Q = P(X) = P$. Cela explique qu'on utilise indifféremment les notations P et $P(X)$.

b) L'addition et le produit sont **commutatifs**, mais pas la composition. On ne démontre pas les propriétés « naturelles » des opérations dans $\mathbb{K}[X]$, notez cependant que le produit est **intègre** ce qui veut dire

c) Dans $\mathbb{K}[X]$, on peut additionner et multiplier par un scalaire, on peut donc faire des

ce qui signifie que $\mathbb{K}[X]$ est un

Proposition (Conséquence des opérations sur le degré)
Soient P et Q deux polynômes non nuls. On a :

- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, $\deg(P + Q) =$

- Si $\deg(P) = \deg(Q)$, $\deg(P + Q)$

- $\deg(P \times Q) =$

- $\deg(P \circ Q) =$

Démonstration
Par exemple pour le produit, en notant $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j X^j$.

Polynôme formel avec X et fonction polynômiale avec x : quelle différence ?
Etant donné un polynôme P et un scalaire α, on peut calculer $P(\alpha)$. Par exemple, si $P = X^2 + X + 1$ alors $P(2) = 7$. Un polynôme P permet donc de définir une application $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et, si on prend $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ, on obtient une fonction réelle qu'on dira *polynômiale* : $x \mapsto P(x)$.
Mais on peut également appliquer un polynôme à d'autres objets, par exemple une fonction ou une matrice carrée. Voici une des façons de comprendre la notion de polynôme *formel* : X peut être tout objet pour lequel on sait calculer des sommes et des produits.

2 Arithmétique des polynômes

Définition
Soit A et B deux polynômes.
On dit que A est un **multiple** de B s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.
On dit aussi que A est **divisible** par B ou que B est un **diviseur** de A et on note $B|A$.

Exemples :

a) $(X-1)|(X^4-1)$ car $X^4 - 1 = (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)$.

b) Le polynôme nul

Proposition
Soit A un polynôme non nul. Si B est un diviseur de A alors $\deg(B) \leq \deg(A)$.

Démonstration
C'est une conséquence immédiate des propriétés du degré : si $B|A$ alors il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$ donc $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q) \geq \deg(B)$. ■

Remarque : $\deg(B) \leq \deg(A)$ est une *condition nécessaire* pour que $B|A$ mais pas une *condition suffisante*. Par exemple :

Exercice
Trouver tous les diviseurs unitaires de $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

Réponse
Un diviseur de $X^2 + 1$ peut être de degré

Proposition
Soit deux polynômes A et B. Si $A|B$ et $B|A$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.

Démonstration
Supposons que $A|B$ et $B|A$: il existe des polynômes Q et R tels que $B = AQ$ et $A = BR$. On a donc $B = BRQ \iff B(1 - RQ) = 0$. Par intégrité du produit dans $\mathbb{K}[X]$, soit $B = 0$ et alors $A = 0$. On a donc $A = 1 \times B$ et la propriété est vraie. Sinon, $1 - RQ = 0 \iff RQ = 1$ ce qui implique, en considérant leurs degrés, que R et Q sont des polynômes constants. Mettons $R = \lambda$ et on a $A = \lambda B$, la propriété est, là encore, vérifiée. ■

Remarque : la propriété précédente est en fait une équivalence (la réciproque est évidente).

Proposition (Division euclidienne de polynômes)
Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ qui vérifie :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

On dit que $A = BQ + R$ est la **division euclidienne** de A par B, Q est le **quotient**, R est le **reste**.

Démonstration
On garde les notations de la propriété.

- Unicité :

- Existence :

Exemple : $X^3 + 3X^2 + X - 5 = X^2(X + 3) + X - 5$ est la division de $X^3 + 3X^2 + X - 5$ par X^2. Par contre, ce n'est pas

Méthode (Poser une division euclidienne de polynômes)
On procède comme pour une division euclidienne d'entiers : par soustractions successives, en diminuant le degré à chaque étape. On arrête lorsque le reste a un degré strictement inférieur à celui du diviseur.

Exemple : Poser la division euclidienne de $X^3 - X + 1$ par $X + 2$.

Remarque : pour la division dans $\mathbb{K}[X]$ le degré joue dans le rôle de $<$ dans $\mathbb{Z}$.

Proposition
Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$.
$B|A$ si, et seulement si, la division euclidienne de A par B a un reste nul.

Démonstration
On procède par

Définition
Soit A un polynôme. On dit que A est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ lorsque :

- $\deg(A > 0)$ (autrement dit : A n'est pas constant) ;
- les seuls diviseurs de A dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λA (avec λ un scalaire non nul).

Remarque : on dit que les polynômes de la forme λA (avec $\lambda \neq 0$) sont **associés** à A.

Exemple : $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$. En effet, on a trouvé tous ses diviseurs unitaires (exercice précédent) : 1, $X - \mathrm{i}$, $X + \mathrm{i}$ et $X^2 + 1$ et tout diviseur de $X^2 + 1$ sera proportionnel à un de ses diviseurs unitaires. Dans $\mathbb{R}[X]$ on ne peut donc pas trouver de diviseur non constant et non proportionnel à $X^2 + 1$.

Proposition
Les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration
Soit P, un polynôme de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : si on veut faire l'analogie avec l'arithmétique des entiers, les polynômes irréductibles correspondent aux

3 Dérivation des polynômes

Définition
Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
Le **polynôme dérivé** de P est le polynôme P' défini par : $P' =$

Remarque : si $\deg(P) > 0$, on a $\deg(P') =$.

Exemples : $(X+3)' =$; $(5X^{17})' =$

Proposition (Opérations sur les polynômes et dérivation)
On désigne par λ, μ des éléments de $\mathbb{K}$, par P, Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

i. La dérivation est **linéaire** :

ii. $(P \times Q)' =$

iii. $(P \circ Q)' =$

Exemples :

a) Donner la dérivée de $P = (X^2 + X)(3X - 5)$

b) Donner la dérivée de $Q = (X+1)^8$

c) Combien peut-on trouver de polynômes dont la dérivée vaut $5X^2 - 3$?

Remarque : dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le polynôme dérivé correspond à la dérivée de la fonction polynomiale. La différence entre les notions n'est pas cosmétique : la dérivée des fonctions est définie à-partir de calculs de limites pour une variable réelle. Ici, on définit le polynôme dérivé comme un nouveau polynôme, indifféremment du corps $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille. (Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait donc démontrer que les formules de dérivation sont correctes dans le cadre de la dérivation formelle, c'est laissé en exercice et sera justifié d'une façon différente plus loin dans le chapitre).

Définition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit par récurrence la dérivée d'ordre n de P de la façon suivante :

$$P^{(n)} =$$

Exemples :

a) soit $P = X^5$. Calculer $P^{(n)}$ pour $n \in [\![0;6]\!]$.

b) soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n$. Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P^{(m)}$.

Proposition (Formule de Leibniz)
Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $(PQ)^{(n)} =$

Proposition (Formule de Taylor)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.

Démonstration
Soit un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $\alpha = 0$, on remarque que $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$ et, par une récurrence immédiate : $\forall k \geq 0, P^{(k)}(0) = k!a_k \iff a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$, d'où la formule de Taylor.

— Si $\alpha \neq 0$, on pose $Q = P(X + \alpha)$.

On applique la formule de Taylor à Q en 0 : $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(\alpha)$.

En composant avec $X - \alpha$, il vient $P = Q(X - \alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.

Exercice (Facultatif)
Démontrer la formule de Taylor par récurrence sur le degré du polynôme P.

4 Racine d'un polynôme

Définition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P lorsque

Exemples :

a) 3 est racine de $P = X^2 - X - 6$:

b) Donner un polynôme dont -2 est racine :

c) Donner un polynôme dont π est racine :

d) Donner un polynôme dont 1 n'est pas racine :

Proposition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
α est racine de P si, et seulement si, $(X - \alpha) | P$.

Démonstration

$\blacksquare$

Proposition
Un polynôme de degré $n > 0$ admet, au plus, n racines distinctes.

Démonstration
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant pour racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Par une récurrence immédiate on obtient que $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \mid P$. On en déduit que $\deg(P) \geq \deg\left(\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)\right) \iff \deg(P) \geq n$. ■

Méthode (Pour prouver que deux polynômes non nuls P et Q sont égaux)
- On peut toujours montrer que leurs coefficients sont identiques.
- On peut également prouver que $P - Q$ est le polynôme nul. Pour cela :
  1. il faut que $\deg(P) = \deg(Q)$, notons n cet entier naturel ;
  2. si on trouve plus de n racines de $P - Q$ alors $P - Q = 0$.

Remarque : la méthode précédente permet de valider les formules de dérivation formelle des polynômes qu'on a « récupéré » de la dérivation des fonctions polynômiales.
Par exemple, pour le produit de deux polynômes P et Q : $(PQ)'$ est un polynôme, $P'Q + PQ'$ en est *a priori* un autre. Or, on sait que les fonctions polynômiales associées sont identiques, le polynôme $(PQ)' - (P'Q + PQ')$ a donc une infinité de racines, on déduit que c'est le polynôme nul ; autrement dit : $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Définition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P.
On appelle **(ordre de) multiplicité** de la racine α le plus grand entier n tel que $(X - \alpha)^n | P$.

Remarque : toute racine du polynôme P a une multiplicité qui est dans $[\![1; \deg P]\!]$.

Exemple : soit $P = 3X^3 - 5X^2 + X + 1$.

a) Prouver que 1 est racine de P

b) Déterminer la multiplicité de 1

Théorème
Soit P, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P et $n \in \mathbb{N}^*$.
n est l'ordre de multiplicité de α si, et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \textbf{et} \quad P^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple : on reprend l'exemple précédent.

$P' =$ et $P'(1) =$

$P^{(2)} =$ et $P^{(2)}(1) =$

Démonstration
Ce théorème est une conséquence directe de ■

Proposition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P de multiplicité $r \geq 2$.

Alors, α est une racine de P' de multiplicité

Remarques :

a) C'est un corollaire du théorème précédent.

b) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine simple de P alors α n'est pas racine de P'. On aurait pu intégrer cette situation à l'énoncé précédent en posant que les scalaires qui ne sont pas racines d'un polynôme ont pour multiplicité 0.

Proposition
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et α un nombre complexe non réel qui est une racine de P.
Si α a pour multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P de multiplicité m.

Démonstration
C'est une conséquence des propriétés de la conjuguaison : linéarité et respect des produits. En effet :

5 Théorème de D'Alembert-Gauss et conséquences

5.1 Polynômes scindés

Définition
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **scindé** s'il est possible de l'écrire sous la forme :

$$P = \lambda(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n) \qquad \text{avec } (\lambda, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

n est alors le degré de P et λ son coefficient dominant.

Remarque : dans la définition précédente, les x_i sont les racines de P mais ne sont pas nécessairement distincts deux-à-deux. On peut reformuler la définition ainsi :

$$P = \lambda(X - x_1)^{n_1} \dots\ (X - x_r)^{n_r} \quad \text{avec } i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Alors, n_i est la multiplicité de la racine x_i et on a $n_1 + \dots + n_r = \deg(P)$.

Théorème (D'Alembert-Gauss)
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Remarques :

a) attention, ce n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$! Un contre-exemple :

b) On peut reformuler le théorème : sur $\mathbb{C}$, toute équation polynomiale de degré n a n solutions (en comptant les multiplicités).

c) Ce théorème assure l'existence de racines, mais il ne dit pas comment les trouver.

d) Le théorème de D'Alembert Gauss est très important, il est d'ailleurs également appelé *théorème fondamental de l'algèbre*. Sa démonstration est hors programme.

5.2 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

Du théorème de D'Alembert-Gauss, on déduit la nature des polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$:

Proposition

i. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

ii. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 **ainsi que** les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème

Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ se décompose en un produit de polynômes irréductibles.

Exemples :

a) décomposer $X^3 - X^2 - 4$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$.

b) décomposer $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.

5.3 Somme et produit des racines d'un polynôme

Proposition

Soit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Sur $\mathbb{C}$, P est scindé et s'écrit :

$$P = a_n(X - x_1)(X - x_2)\dots\ (X - x_n)$$

Alors :

$$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \qquad \text{et} \qquad x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Démonstration

Il suffit de développer le produit $P = a_n(X - x_1)(X - x_2)\dots\ (X - x_n)$ et de considérer les coefficients de degré 0 et $n - 1$. ■

On reprend la proposition précédente dans le cas particulier des polynômes de degré 2 :

Proposition
Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (avec $a \neq 0$) et $r_1,\ r_2$ ses racines. On a :

$$r_1 \times r_2 = \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad r_1 + r_2 =$$

Exercice
Déterminer deux complexes dont la somme vaut $1 + \mathrm{i}$ et le produit vaut 2.

6 Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles

Définition

— On appelle **fonction rationnelle** toute fonction $f : x \longmapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes.

— Les racines de B sont les **pôles** de la fonction rationnelle f.

— On dit que $x_0 \in \mathbb{K}$ est un **pôle simple de** f lorsque x_0 est une racine simple de B.

— f est définie et dérivable autant de fois que l'on veut hors de ses pôles, c'est-à-dire sur $\{x \in \mathbb{R}\ /\ B(x) \neq 0\}$.

Exemple : quels sont les pôles de la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+x-2}$?

Définition
Soit $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle. On dit que c'est un élément simple lorsque B est de la forme C^α avec C qui est irréductible , α un entier ≥ 1 et que $\deg(A) < \deg(C)$.

Plus précisément, si $\deg(C) = 1$ alors on dit que f est **élément simple de première espèce** ; si $\deg(C) = 2$ alors on dit que f est **élément simple de deuxième espèce**.

Exemples :

- Deux éléments simples de 1ère espèce :

- Un élément simple de deuxième espèce :

Remarque : on connait la nature des polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$, cela permet de préciser la nature des éléments simples selon le corps sur lequel on travaille :

— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: ils sont de la forme

— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: ils sont de la forme

On sait facilement passer d'une somme de fonctions rationnelles à une seule fonction rationnelle :

$\frac{4}{2X+1} + \frac{X+2}{X^2+X+1} =$

La décomposition en éléments simples correspond à faire le contraire : à casser une fraction rationnelle compliquée en une somme fractions rationnelles plus simples.

Méthode (Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle à pôles simples)
Supposons que l'on ait une fonction rationnelle $\frac{A}{B}$ à pôles simples.

a) on calcule la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$;
b) on écrit $\dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$;
c) on trouve la décompostion de B en produit de polynômes irréductibles : $B = C_1 \dots C_m$;
d) on peut écrire la fraction $\dfrac{A}{B}$ sous la forme : $Q + \dfrac{P_1}{C_1} + \dots + \dfrac{P_m}{C_m}$ avec chaque $\dfrac{P_i}{C_i}$ qui est un élément simple.

Exemples :

a) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x}{(x+1)(x-3)}$.

b) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^2+5x+2}{x^3-1}$.

c) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^3+x}{x^2-5x+4}$.

Remarques :

1. la démonstration est admise (c'est d'ailleurs pour cette raison que l'on présente ce résultat comme une méthode et pas comme un théorème).
2. Cette méthode se généralise au cas des fractions rationnelles qui ont des pôles multiples, mais ce n'est pas au programme.
3. Selon la situation, on préférera une seule fraction rationnelle (calcul de limites) ou une décomposition en éléments simples (calcul d'intégrales et de primitives, faire apparaître des téléscopages dans des calculs de somme).