Chapitre 12 : dérivation et applications

I désigne un intervalle (non vide, non réduit à un point) et a un réel de I.
f est une fonction définie sur I, $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 Qu'est ce que la dérivation ?

1.1 Dérivabilité

Définition

- On dit que f est dérivable en a lorsque

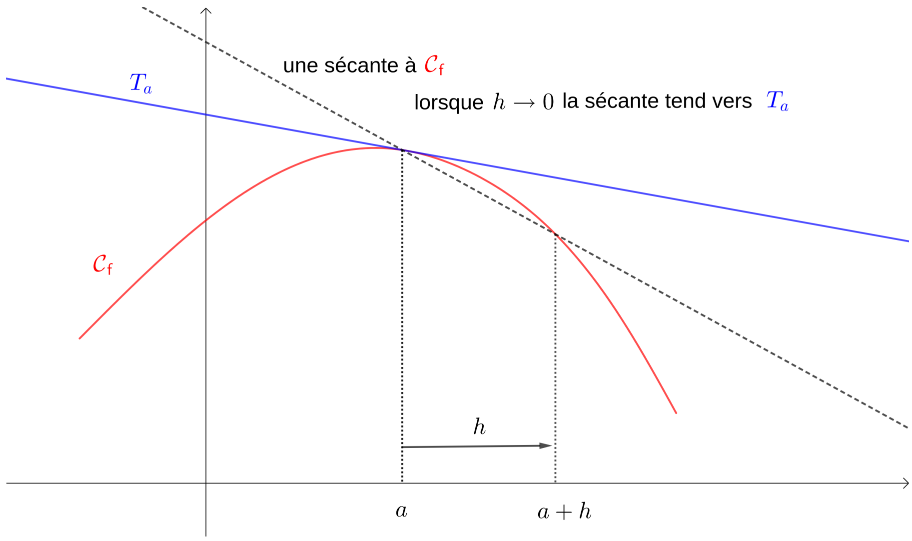
  On la note alors

- On appelle *domaine de dérivabilité* de f l'ensemble des réels où f est dérivable. On a alors une nouvelle fonction définie sur cet ensemble, on la note f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Remarques :

a) La dérivabilité en a est une notion locale en a. On le matérialise souvent en faisant le changement de variable $x = a + h$ (c'est-à-dire en faisant une composition) et on étudie alors

b) Lorsqu'il existe, le nombre dérivé est la limite du



Proposition

- Si f est dérivable en a alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a ; une de ses équations est :

- la réciproque est vraie : si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a alors f est dérivable en a et $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration
Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

En écrivant, pour $x \neq a$, $f(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f'(a)\times 0+f(a) = f(a)$ et donc f est continue en a. ■

Remarque : on a une relation d'inclusion :

domaine de dérivabilité $\subset$ domaine de continuité $\subset$ domaine de définition

Théorème (Catalogue de fonctions dérivables)
Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition, en particulier les fonctions polynômiales, les fonctions trigonométriques. **Les exceptions notables sont :**
- $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 (ainsi que toutes les racines n-ièmes pour $n \geq 2$) ;
- $x \mapsto |x|$ en 0 ;
- arccos et arcsin en ± 1 ;
- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en tout $a \in \mathbb{Z}$.

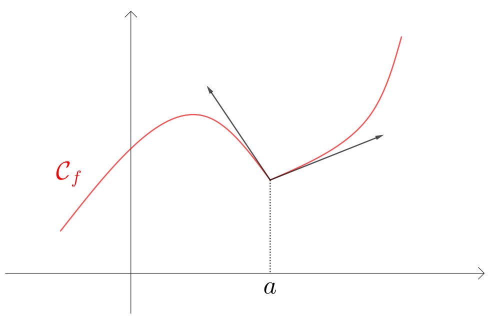
Remarque : la dérivabilité des fonctions de référence se prouve à l'aide des définitions ou des opérations sur les dérivées qu'on verra au point 2.

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponse
Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

Définition
- f est dérivable **à gauche** en a lorsque
- f est dérivable **à droite** en a lorsque
- $\mathscr{C}_f$ admet une **demi-tangente** au point d'abscisse a lorsque

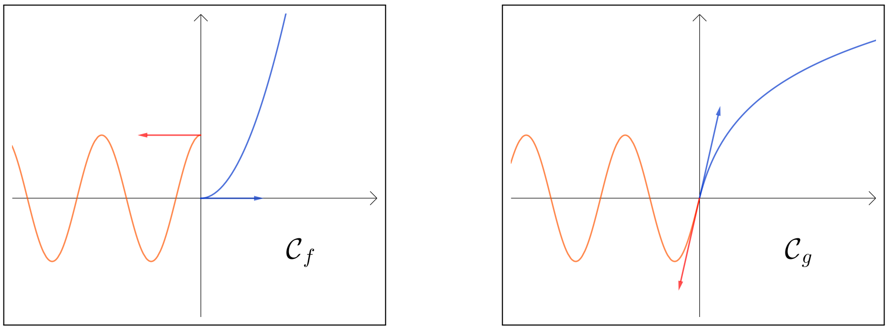


Remarque : on note $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite en a lorsqu'ils existent.

Proposition

Si **alors** f est dérivable en a.

Exemple : les fonctions $f : x \longmapsto \begin{cases} \cos x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ et $g : x \longmapsto \begin{cases} \sin x \text{ si } x \leq 0 \\ \ln(x-1) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ sont dérivables à gauche et à droite en 0, les nombres dérivés à gauche et à droite coïncident mais seule g est dérivable en 0.



1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition

Soit f définie sur I.

i. On appelle **dérivée n-ième** de f la fonction notée $f^{(n)}$ et définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

ii. $f^{(n)}$ est également notée

iii. Lorsque $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$.

iv. On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

v. On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Théorème (Catalogue de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$)

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de dérivation.

Théorème

Les ensembles $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont stables par les opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, quotient par une fonction qui ne s'annule pas, composition.

Exemple : $f(x) = \dfrac{\cos(x^2 + x)}{e^x}$ est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme quotient et composée de fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque : les ensembles $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ étant stables par combinaisons linéaires, ce sont des

1.4 Cas des fonctions réelles à valeurs dans complexes

La définition donnée pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'adapte très simplement pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$: une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable en a lorsque

La différence fondamentale est que les représentations graphiques sont plus difficiles à envisager *(mais ce n'est pas impossible, pouvez-vous imaginer comment procéder ?)* et qu'en conséquence la notion de tangente est moins naturelle.

Remarque : que se passe-t-il pour des fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$? D'un point de vue graphique, il est très difficile de représenter une telle fonction. D'un point de vue analytique, on peut adapter la définition de la dérivabilité qu'on a donné pour les fonctions de la variable réelle. On obtient ainsi des fonctions de la variable complexe dérivables (on dira holomorphes) mais c'est beaucoup plus difficile.

2 Comment trouver une fonction dérivée ?

2.1 Opérations sur les dérivées

Théorème (Opérations sur les fonctions et dérivation)
Si f et g sont dérivables en a alors :

i. pour tous réels λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et on a : $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$
ii. $f \times g$ est dérivable en a et on a : $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$
iii. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$

Démonstration

— Pour le produit :

— Pour l'inverse :

— On en déduit

Exercice
À l'aide des opérations, retrouver la formule $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} =$

Réponse

Théorème (Dérivation d'une composée de fonctions dérivables)
Soit f et g deux fonctions telles que

Remarque : cette formule sera prouvée en TD.

Dans le cas particulier des fonctions bijectives, ce résultat permet d'obtenir le nombre dérivé de la réciproque :

Proposition
Si f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$\forall a \in f(I), \qquad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Remarque : Tous les résultats précédents portent sur la dérivabilité en un point a, ils se prolongent naturellement au domaine de dérivabilité.

Exercice
Retrouver les formules pour les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques.

Réponse
Par exemple pour

2.2 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème
Si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $f'(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l quand x tend vers a.

Remarque : la démonstration de ce théorème sera vue en TD.

Méthode (Pour prouver la dérivabilité de f en $a \in I$)
- On peut toujours utiliser la définition :
- Si ses conditions sont vérifiées, on peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée et

2.3 Formule de Leibniz

Théorème (Formule de Leibniz)
Soit $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dans $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors, fg aussi et on a :

Remarque : la démonstration, déjà vue pour les polynômes, se traite

2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. f est dérivable sur I si, et seulement si,

On a alors :

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \dfrac{\mathrm{d}e^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{d}x} =$

3 Application des dérivées

3.1 Approximation locale

Définition
Soit f définie sur l'intervalle I, $a \in I$. On note $J = \{h \in \mathbb{R} \ / \ a + h \in I\}$

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1 en** a lorsqu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall h \in J, \ f(a+h) = \alpha + \beta h \ + \ h\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Interprétons la notion de DL1 : localement, f est approchée par la somme d'une fonction affine et d'un reste négligeable devant la fonction affine (on donnera du sens à cette idée de négligeabilité dans le chapitre sur l'analyse asymptotique).

Graphiquement,

Proposition
f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si, et seulement si, f est dérivable en a.

On a alors :

Démonstration
On a une équivalence à prouver, raisonnons par double implication.

$\Longleftarrow$: Supposons

$\Longrightarrow$: Supposons

Remarques :

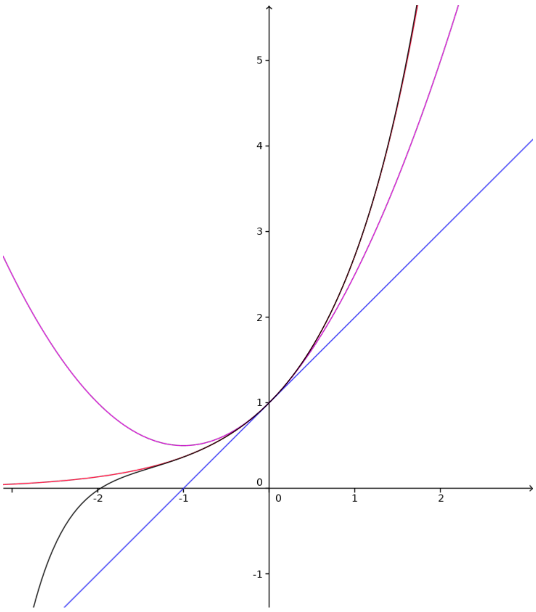
a) La proposition précédente fournit donc une définition alternative de la dérivation : un fonction est dérivable en a lorsqu'elle admet un DL1 en a. $f'(a)$ est alors le coefficient directeur de la partie affine du DL1.

b) Le reste du DL1 étant localement négligeable devant la partie affine, il est tentant de le négliger et d'écrire $f(a+h) \simeq \alpha h + \beta$.

   C'est ce que vous avez fait

c) On étudiera les développements limités de façon plus poussée dans un prochain chapitre ; on verra en particulier l'unicité du DL qui est implicite ici.

   À titre d'exemple, on représente exp ainsi que ses DL aux ordres 1, 2, et 7 en 0 :



Pour le moment, ce qu'il faut retenir des DL1 :

- il s'agit d'approcher f localement par une fonction affine. C'est donc une reformulation analytique de la relation graphique entre la courbe représentative de f et sa tangente au point d'abscisse a ;
- il y a équivalence entre la dérivabilité en a et l'existence d'un DL1.

3.2 Etude des variations et recherche d'extrema

Vu et re-vu :

Proposition
Si f' est de signe constant sur un intervalle $J \subset I$ alors f est monotone sur cet intervalle J.

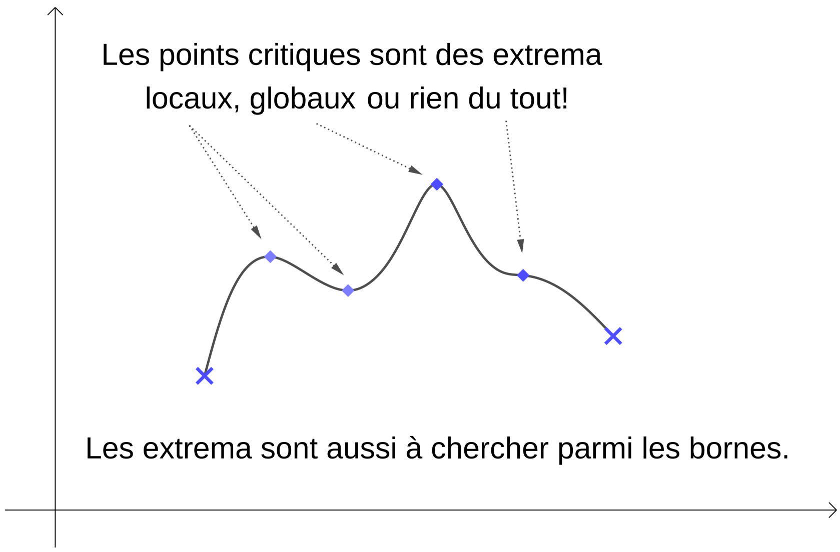
Remarque : la preuve de cette proposition sera vue en TD.

Ce résultat a deux applications importantes :

1. Trouver les extrema de f

   À-partir de l'étude du signe de f' on peut construire le tableau de variations de f. Grace au tableau de variations on peut trouver les **extrema locaux et globaux** de f.

   Remarque : les extrema de f sont à trouver parmi les extrémités du domaine d'étude ainsi que les points d'annulation de f' (qu'on appelle *points critiques*).

   Remarque : un *extremum* au singulier devient des *extrema* au pluriel. (Pour être rigoureux, on ne met pas de « s » : c'est du latin).

2. Prouver que f est bijective

   Si f' est strictement positive (respectivement négative) sur I alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I et réalise donc une bijection de I sur $f(I)$.

   Remarques :

   a) Le résultat reste valable si f' s'annule en un nombre fini de points.

   b) Puisque f est dérivable alors f est continue et il est facile de déterminer $f(I)$.

On en profite pour revenir sur le cas particulier des bijections :

Théorème (de la bijection)
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I.
Si $f' > 0$ sur I alors f est une bijection strictement croissante de I sur $f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante sur $f(I)$, dérivable sur $f(I)$ et on a :

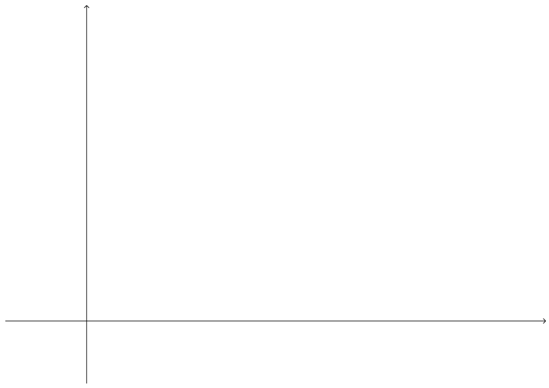
$$\forall x \in f(I), \quad {f^{-1}}'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

Remarque : on a un énoncé similaire si $f' < 0$ sur I.

3.3 Théorème de Rolle et Accroissements Finis

Théorème (Rolle)
Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors

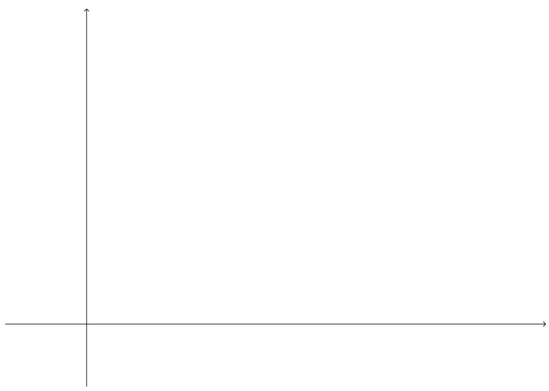


Remarque : on peut interpréter ce théorème d'un point de vue cinématique. Si la vitesse aux moments a et b est la même alors il existe un moment auquel l'accélération est nulle.

Démonstration
f est continue sur $[a;b]$ donc $f([a;b])$ est

Théorème (des Accroissements Finis)
Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.

Alors



Remarque : on peut interpréter ce théorème d'un point de vue graphique et d'un point de vue cinématique.

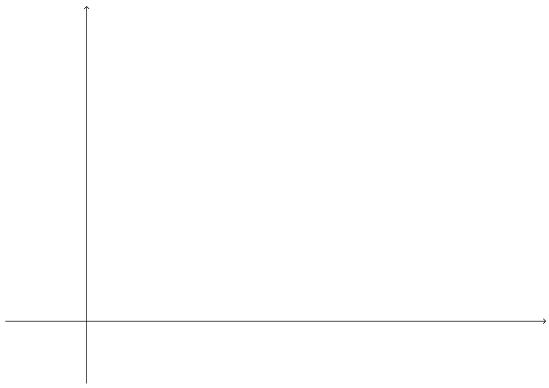
- Il existe $c \in]a;b[$ telle que la tangente au point d'abscisse c soit parallèle à la sécante aux points d'abscisses a et b.
- Il existe un moment c auquel la vitesse instantanée vaut la vitesse moyenne entre les moments a et b.

Démonstration
Si $f(a) = f(b)$ alors

Sinon, soit $g(x) =$

Théorème (Inégalité des Accroissements Finis)
Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.
S'il existe $M>0$ tel que $\forall x \in]a;b[,\ |f'(x)| \leq M$ alors :

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, \quad |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$



Remarque : on peut interpréter cette inégalité graphiquement : f ne peut pas varier plus que selon sa tangente la plus pentue.

Démonstration
Il suffit de se servir

Définition
Une fonction f qui vérifie $\forall (x,y) \in I^2, |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ est dite M-lipschitzienne sur I.

On peut reformuler l'inégalité des accroissements finis :

Théorème (Inégalité des Accroissements Finis - Version 2)
Si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par M alors f est $M-$lipschitzienne.

Remarque : on verra en TD que ce résultat peut servir pour l'étude de suites récurrentes.

Pour des fonctions à valeurs complexes :

- Le théorème de Rolle n'est plus valable. Par exemple :

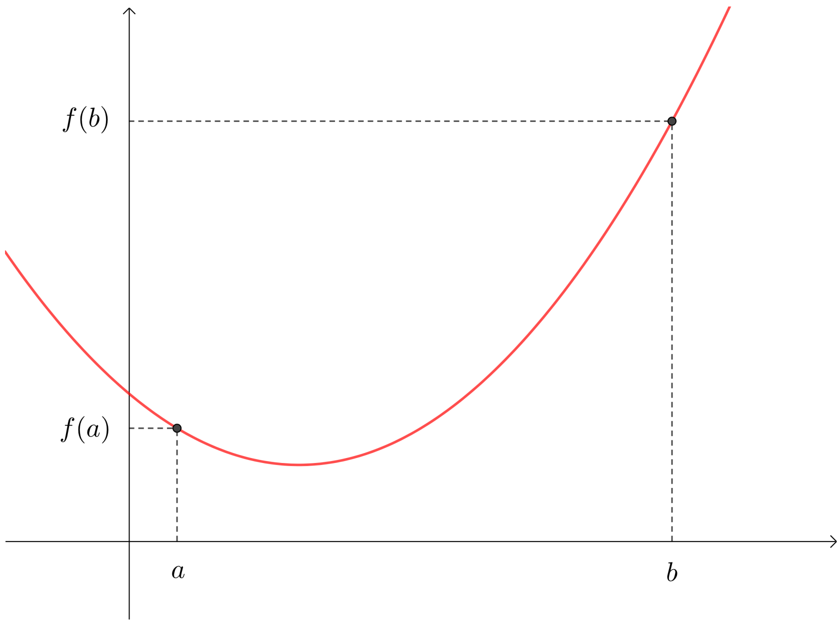
- Le TAF non plus. Le même contre-exemple est valable.
- Par contre, l'Inégalité des Accroissements Finis est valide. Mais cela pose question :

4 Fonctions convexes

4.1 Généralités

Définition
La fonction f est convexe sur I lorsque, pour tous $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in [0;1]$ on a :

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$



Proposition (Interprétation graphique de la convexité)
f est convexe si, et seulement si, quels que soient a, b dans I, sa courbe représentative entre les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est située sous la sécante (AB).

Remarque : on dit que f est concave lorsque la courbe est au-dessus de ses sécantes.
Autrement dit,

Proposition
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$.

Pour $x \neq a$, le taux d'accroissement entre x et a est $\tau(x) =$

f est convexe sur I si, et seulement si,

Proposition (Corollaire)
Soit f convexe sur I, $a < b < c$ dans I.

On a :

4.2 Convexité et dérivation

Proposition
Soit f définie et dérivable sur I.

f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.

Proposition (Corollaire)
Soit f définie et dérivable sur I.
f est convexe si, et seulement si, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes.

Proposition
Soit f définie et dérivable deux fois sur I.
f est convexe sur I si, et seulement si,

Exemples de fonctions convexes :

Remarque : en remplaçant f par $-f$ on obtient des résultats analogues pour les fonctions concaves :

— f est concave si, et seulement si, f'

— f est concave si, et seulement si, f''