Chapitre 17 - Intégration

Depuis la Terminale, on manipule des intégrales construites sur l'idée qu'on mesure l'« aire sous la courbe ». Ce concept est valide et intuitif mais, jusqu'à présent, n'a pas été construit de façon rigoureuse. C'est l'objet de ce chapitre.

Notations : a et b désignent des réels, avec $a < b$ et on considérera des fonctions définies sur l'intervalle $[a;b]$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^{[a;b]}$.

1 Intégrales des fonctions en escalier

Définition

- Une **subdivision** de $[a;b]$ est une suite finie de réels $s = (x_0, \ldots, x_n)$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

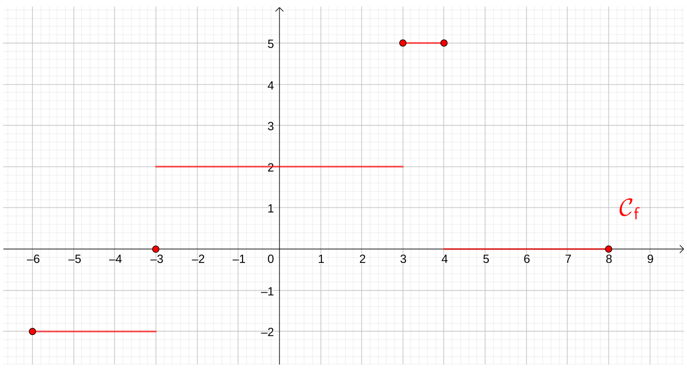
  Si les intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ ont une longueur constante, on dit que la subdivision est **régulière**. Son **pas** est alors la largeur d'un des intervalles, il vaut : $h =$

- Une **fonction en escalier** sur $[a;b]$ est une fonction « constante par morceaux » , c'est-à-dire pour laquelle il existe une subdivision s telle que la fonction soit constante sur chaque $]x_i; x_{i+1}[$ pour $i \in$. On dit alors que s est **adaptée** à f.

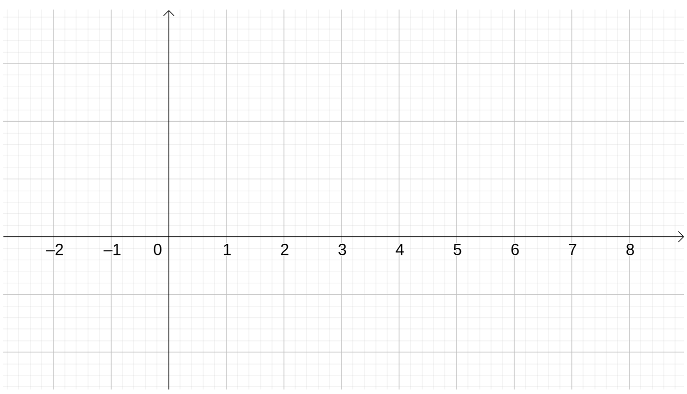
- On note $\mathrm{Esc}([a;b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$.

Exemples :

a) la fonction f, définie sur $[-6;8]$ est en escalier, donner deux subdivisions (dont une régulière) qui soit adaptées à f :



b) Dessiner les courbes de deux fonctions f et g de $\mathrm{Esc}([-2;8])$, puis construire une subdivision qui soit adaptée à f et à g.



Proposition

$\mathrm{Esc}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$.

Démonstration

— La fonction nulle est constante et donc en escalier sur $[a;b]$.

— Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, λ et μ deux réels. Montrons que $h = \lambda f + \mu g$ est en escalier sur $[a;b]$.
Soit $s = (x_0; \dots ; x_n)$ une subdivision adaptée à f , soit $t = (y_0; \dots ; y_p)$ une subdivision adaptée à g. On considère la subdivision $s \cup t$ obtenue en ordonnant tous les éléments de $\{x_1; \dots ; x_n; y_1; \dots ; y_p\}$, on la note $(z_0; \dots ; z_r)$.
Chaque intervalle $]z_k; z_{k+1}[$ est inclus dans un intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ sur lequel f est constante donc $s \cup t$ est adaptée à f. De même, $s \cup t$ est adaptée à g.
f et g sont constantes sur chaque intervalle $]z_k; z_{k+1}[$ donc $h = \lambda f + \mu g$ aussi.
$s \cup t$ est donc adaptée à h et h est bien en escalier sur $[a;b]$.

Finalement, $\mathrm{Esc}([a;b])$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$. ■

Exercice

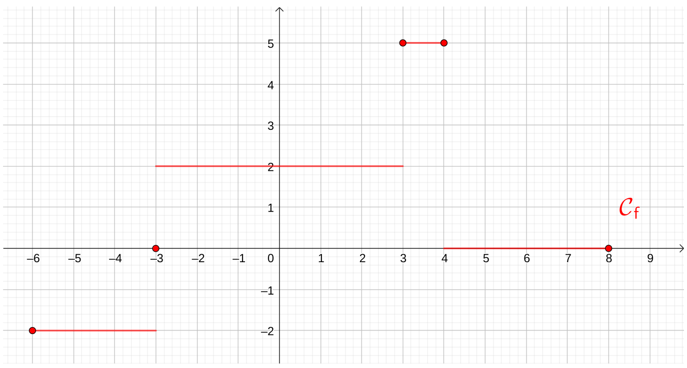
Montrer que $\mathrm{Esc}([a;b])$ est stable par produit.

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit f, une fonction en escalier sur $[a;b]$. Soit $s = (x_0; \dots ; x_n)$ une subdivision adaptée à f, notons c_i la valeur prise par f sur $]x_i; x_{i+1}[$ pour $i \in [\![0; n-1]\!]$.

On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$ et on note $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ le nombre réel :

Exemple : déterminer l'intégrale de la fonction f, définie sur $[-6;8]$ et représentée ci-dessous :



Remarques :

1. $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ ne dépend pas des valeurs prises par f aux points de la subdivision s.

2. Comme f est en escalier, chaque $c_i(x_{i+1} - x_i)$ correspond à l'*aire algébrique* (c'est-à-dire *signée*) d'un rectangle.
$\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est donc la différence entre les *aires géométriques* (c'est-à-dire *non-signées*) des rectangles au-dessus de l'axe des abscisses et des rectangles au-dessous de l'axe des abscisses

3. Cette définition est ambigüe car

Exercice
Soit n un entier naturel non nul. Notons $E(x) = \lfloor x \rfloor$. Déterminer $\displaystyle\int_0^n E$ et $\displaystyle\int_{-n}^n E$.

Proposition (propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier)
Soit f et g des fonctions en escalier sur $[a; b]$

1. L'intégrale est **linéaire** :

2. L'intégrale est **positive** :

3. L'intégrale est **croissante** :

4. L'intégrale vérifie la **Relation de Chasles** :

Démonstration
Notons $s = (x_0; \dots; x_n)$ une subdivision adaptée à f et g ; c_i et d_i les valeurs prises par f et g sur $]x_i; x_{i+1}[$ pour $i \in [\![0; n-1]\!]$.

1.

2.

3.

4.

Morale de l'histoire, à ce stade :
On sait intégrer les fonctions en escalier (et seulement celles-là).
Leurs intégrales correspondent à des sommes finies qu'on peut interpréter à ses sommes de surfaces algébriques de rectangles.
Pour ces fonctions, les propriétés classiques de l'intégrale ont été démontrées.

2 Intégrales des fonctions continues

Notation : $[a;b]$ est un intervalle, f désigne une fonction continue sur $[a;b]$.

2.1 Construction de l'intégrale

Théorème
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g telle que : $\forall x \in [a;b],\ |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

Exemple : on considère la fonction continue sur $[1;15]$ représentée ci-dessous. Construire sur la figure la courbe représentative d'une fonction en escalier g telle que $\forall x \in [1;15],\ |f(x) - g(x)| \leq 1$.

Remarques :

a) $\forall x \in [a;b],\ |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$ signifie que la distance entre f et g est inférieure à ε, indépendamment de x.
On note $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

b) Comment va-t-on construire l'intégrale de f ?

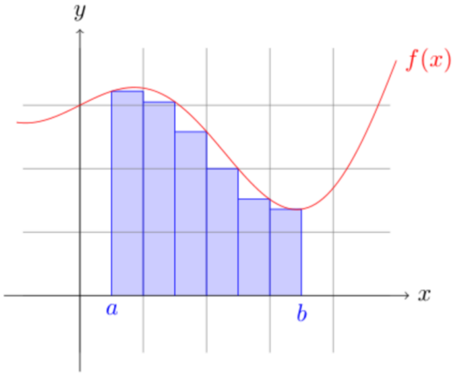
c) Ce résultat est admis.

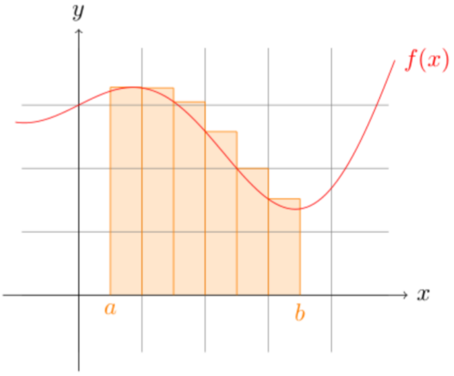
Corollaire
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g^- et g^+ telles que :

$$g^- \leq f \leq g^+ \qquad \text{et} \qquad \|g^+ - g^-\|_\infty \leq \varepsilon$$

Démonstration
D'après le théorème précédent, il existe une fonction en escalier g telle que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On pose $g^+ = g + \frac{\varepsilon}{2}$ et $g^- = g - \frac{\varepsilon}{2}$. ∎

Remarque : Les fonctions g^+ et g^- données par le corollaire précédent sont en escalier, donc on sait les intégrer :





On comprend que l'« aire sous la courbe de f » est encadrée par $\int_{[a;b]} g^-$ et $\int_{[a;b]} g^+$.
En diminuant l'écart entre g^- et g^+, de façon asymptotique, on va ainsi définir l'intégrale de f.

Définition
On note : $E_f^+ = \{g^+ \in \mathrm{Esc}([a;b]) \ / \ f \leq g^+\}$ et $E_f^- = \{g^- \in \mathrm{Esc}([a;b]) \ / \ g^- \leq f\}$.

Théorème (Construction de l'intégrale de f)

$$\inf \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^+ \right\} = \sup \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^- \right\}$$

Cette quantité commune est prise comme définition de l'intégrale de f sur $[a;b]$.
On la note $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : la démonstration de ce théorème (existence des deux bornes et leur égalité) est en annexe de ce chapitre.

2.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Proposition
Soit f, g des fonctions continues sur $[a;b]$.

1. L'intégrale est **linéaire** :

2. L'intégrale est **positive** :

3. L'intégrale est **croissante** :

4. L'intégrale vérifie la **Relation de Chasles** :

Démonstration (Linéarité de l'intégrale)
Commençons par prouver un résultat intermédiaire qui sera utile, on appelle cela un **lemme** :

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\theta \in \mathrm{Esc}([a,b])$ vérifie $\|f - \theta\|_\infty \leq \varepsilon$, alors : $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\varepsilon$.

Preuve du Lemme :
On a : $\theta - \varepsilon \leq f \leq \theta + \varepsilon$, d'où (par définition de l'intégrale) $\displaystyle\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon)$: $(\star)$.
Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) = \int_{[a,b]} \theta - \int_{[a;b]} \varepsilon = \int_{[a,b]} \theta - \varepsilon(b-a) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon) = \int_{[a,b]} \theta + \varepsilon(b-a)$$

Avec $(\star)$ on a donc bien $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\varepsilon$ et le lemme est démontré.

Démontrons à-présent la linéarité de l'intégrale :
soit f et g des fonctions continues sur $[a;b]$, soit λ et μ des réels, prouvons que :

$$\int_{[a;b]} \lambda f + \mu g \ = \ \lambda \int_{[a;b]} f \ + \ \mu \int_{[a;b]} g.$$

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Esc}([a,b])$ telles que : $\|f - \theta_1\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\|g - \theta_2\|_\infty \leq \varepsilon$.

Le lemme s'applique et on a : $\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta_1\right| \leq (b-a)\varepsilon$ et $\left|\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} \theta_2\right| \leq (b-a)\varepsilon \quad (\star)$.

Posons $h = \lambda f + \mu g$ et $\theta = \lambda\theta_1 + \mu\theta_2$.

On a : $\forall x \in [a;b],\ |h(x) - \theta(x)| = |\lambda(f(x) - \theta_1(x)) + \mu(g(x) - \theta_2(x))|$

$$\leq |\lambda| \underbrace{|f(x) - \theta_1(x)|}_{\leq \varepsilon} + |\mu| \underbrace{|g(x) - \theta_2(x)|}_{\leq \varepsilon}$$

Autrement dit : $\|h - \theta\|_\infty \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$.

On utlise le lemme et il vient : $\left|\int_{[a,b]} h - \int_{[a,b]} \theta\right| \leq (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$.

Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a : $\int_{[a,b]} \theta = \lambda \int_{[a,b]} \theta_1 + \mu \int_{[a,b]} \theta_2$.

En se servant de $(\star)$ il suit que $\left|\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g - \int_{[a;b]} \theta\right| \leq (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$.

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[a,b]} h - \left(\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g\right)\right| &= \left|\int_{[a,b]} h - \int_{[a;b]} \theta + \left(\int_{[a;b]} \theta - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g\right)\right| \\
&\leq \left|\int_{[a,b]} h - \int_{[a;b]} \theta\right| + \left|\int_{[a;b]} \theta - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g\right| \\
&\leq 2(b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\left|\int_{[a,b]} h - \left(\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g\right)\right| = 0$, c'est-à-dire la linéarité de l'intégrale.

Remarque : la positivité, la croissance (qui en est une conséquence) et Chasles sont laissés en exercice.

Proposition (conséquences utiles)
Soit f, une fonction continue sur $[a;b]$. On a :

1. On a $\qquad \leq \int_{[a;b]} f \leq$
2. $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq$
3. Si f est positive alors : $\int_{[a;b]} f = 0 \implies$

Démonstration

1. f est continue sur $[a;b]$ donc $\inf_{[a;b]}(f)$ et $\sup_{[a;b]}(f)$ existent, notons-les m et M.

On a alors :

2. On a $-|f| \leq f \leq |f|$ donc

3. Voir la fiche de TD.

Définition
Soit f intégrable. La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : la valeur moyenne de f est l'unique constante μ
telle que l'on ait $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mu$.

2.3 Extension de la définition et dernières propriétés

Définition (bornes égales ou dans le « mauvais sens ».)
On considère f, une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$. On pose :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Remarque : la linéarité et la relation de Chasles demeurent vraies mais attention, la positivité et la croissance (qui en découle) ne le sont plus !

Proposition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, a et b deux réels.

1. Soit $T > 0$. Si f est $T-$périodique alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \qquad \text{et} \qquad \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Si f est paire alors

3. Si f est impaire alors

Morale de l'histoire, à ce stade :
A l'aide de fonctions simples (les fonctions en escalier) qu'on sait intégrer on a défini l'intégale des fonctions continues : **les fonctions continues sont intégrables**.
Par contre (sauf exceptions), on ne sait pas calculer ces intégrales pour le moment (ça viendra avec les primitives).
Les propriétés de l'intégrale (linéarité et Chasles) se prolongent des fonctions en escalier aux fonctions continues, la positivité et la croissance également mais seulement quand les bornes sont dans le « bon sens ». Intuitivement, l'intégrale est une aire algébrique mais seulement lorsque les bornes sont, là aussi, dans le « bon sens ».

3 Sommes de Riemann

Notation : f désigne une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$.

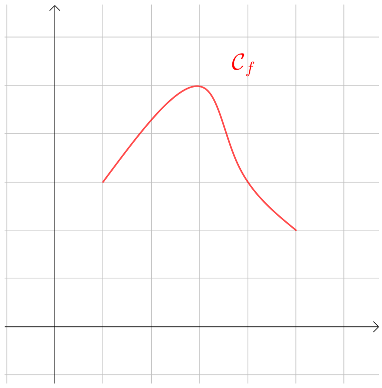
Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ la subdivision régulière de $[a;b]$ à $n+1$ points (et donc n intervalles).

On a, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $x_k =$

On appelle n**-ième somme de Riemann de** f l'intégrale de la fonction en escalier qui vaut $f(x_i)$ sur $[x_i;x_{i+1}[$, on la note $S_n(f)$.

$S_n(f) =$



Théorème (les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f)

$$S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a;b]} f$$

Démonstration

On se limite au cas où f est lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f\left(x_k\right)dx\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f\left(x_k\right)dx\right| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|f(x) - f\left(x_k\right)\right| dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K\left|x - x_k\right| dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K\left(x_{k+1} - x_k\right) dx \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1} - x_k\right)^2 = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{n^2} = K\frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

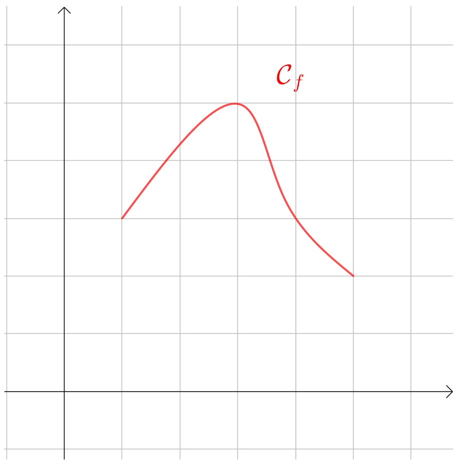
Finalement, comme $K\frac{(b-a)^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a;b]} f$. ■

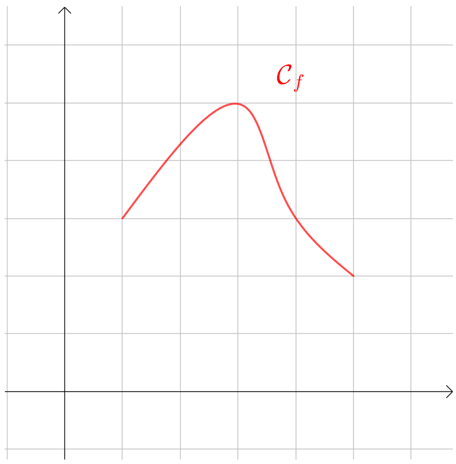
Exercice

Déterminer $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$.

Remarque : le théorème précédent a une application numérique importante.
Pour n assez grand, $S_n(f)$ fournit une valeur approchée de $\int_{[a;b]} f$. C'est ce qu'on appelle la **méthode des rectangles à gauche**.

De façon similaire, on crée la **méthode des rectangles à droite** et la **méthode des trapèzes**.





- La méthode la plus efficace est

- La somme correspondant à la méthode des rectangles à droite est aussi une **somme de Riemann**

4 Lien entre intégrales et primitives

Théorème

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, un intervalle, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$.

i. $F : \left\{ \begin{array}{l} [a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

ii. Pour toute primitive F de f sur $[a;b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Démonstration

i. $\underline{F \text{ est continue sur } [a;b]}$ car, pour tout $x_0 \in [a;b]$, on a :

$$\lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = \lim_{x\to x_0} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

f étant continue sur $[a;b]$, f est bornée sur $[a;b]$: $\exists M > 0 \ / \ \forall t \in [a;b],\ -M < f(t) < M$.
Il suit :

$\forall x \in [a;b],\ \displaystyle\int_{x_0}^x -M\ \mathrm{d}t < \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t < \int_{x_0}^x M\ \mathrm{d}t \iff -M(x-x_0) < \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t < M(x-x_0)$

En passant à la limite pour $x \to x_0$ et, avec le Théorème des Gendarmes, on a $\lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = 0$.

Remarque : il y a une erreur dans ce qui est ci-dessus, trouvez-la et corrigez-la.
Pour prouver i., on peut se limiter à ce qui suit :

$\underline{\text{Prouvons à présent que } F \text{ est dérivable sur } [a;b] \text{ et } F' = f}$.
Soit $x_0 \in [a;b]$, on veut établir que $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. On a, $\forall x \in [a;b] \backslash \{x_0\}$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t - (x-x_0)f(x_0)\right) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t.$$

Il suit que $\displaystyle\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\ \mathrm{d}t\right|$.

Or, f étant continue en x_0 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

On a donc $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow \displaystyle\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \varepsilon\ \mathrm{d}t\right| = \varepsilon$.

Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = 0$.
F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et, comme f est continue sur $[a;b]$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.

$\underline{\text{Reste à voir que } F \text{ est l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } a.}$
Il est clair que $F(a) = 0$. Soit G une primitive de f qui s'annule en a. On a $G - F$ qui est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $[a;b]$, il suit que c'est une fonction constante sur $[a;b]$. Comme $(G-F)(a) = 0$, on a $G - F = 0 \iff G = F$ et F est bien l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

ii. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On a : $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K$ pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K - \left(\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Corollaire

— Les fonctions continues admettent des primitives (de classe $\mathcal{C}^1$).

— Si on connait une primitive F, on sait calculer $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Méthode (Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x$)

1. si on dispose d'une primitive F de f alors le calcul de l'intégrale devient une soustraction !
$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x =$$
2. Sinon, on peut envisager une intégration par parties en voyant $f(x)$ comme le produit $u'(x)v(x)$ et en utilisant la formule :
$$\int_a^b f(x) \ \ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) \ \ \mathrm{d}x =$$
3. Sinon, on peut essayer un changement de variable en introduisant une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration

Les formules d'intégration par parties et de changement de variables sont des conséquences du lien entre les intégrales et les primitives qu'on vient de voir et des propriétés des fonctions dérivables.

— Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ alors uv l'est aussi. On a :
$$\int_{[a;b]} u'v \ + \ \int_{[a;b]} uv' \ = \ \int_{[a;b]} (u'v + uv') \ = \ \int_{[a;b]} (uv)' \ = \ [uv]_a^b$$

— f étant continue, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$.
F et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f\circ\varphi$ aussi et on a :
$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ \ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F\circ\varphi)'(t)\ \mathrm{d}t = F\circ\varphi(\varphi^{-1}(b)) - f\circ\varphi(\varphi^{-1}(a)) = F(b) - F(a)$$
Comme on a aussi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, on en déduit la formule de changement de variable.

Exercice

Soit deux réels a et b. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

5 Formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)
si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors :

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
On procède par récurrence.

Deux conséquences :

Théorème (Inégalité de Taylor Lagrange)
si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors :

$$\left| f(b) \; - \; \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$$

Démonstration
On a :

Théorème (Formule de Taylor-Young)
si $f \in \mathcal{C}^{n}(I)$ alors, pour tout $a \in I$:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \; + \; o((x-a)^n)$$

Démonstration
On se limite au cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$:

6 Brève extention aux fonctions à valeurs complexes

Définition
Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $(a,b) \in I^2$.
On définit le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b f$ par : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

Avec cette définition :
- la linéarité, la relation de Chasles et la formule de Taylor avec reste intégral demeurent valables.
- La relation $|\int_{[a;b]} f| \leq \int_{[a;b]} |f|$ et la formule de Taylor-Lagrange sont toujours vraies mais on a des modules et plus des valeurs absolues.
- Il n'est plus question de positivité ou de croissance de l'intégrale puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Annexe : preuve de la consistance de la définition de l'intégrale

On reprend les notations de la page 5 : f est une fonction continue sur $[a;b]$ et on veut prouver que

$$\inf \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^+ \right\} = \sup \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^- \right\}$$

La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$.
Posons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.

E_f^- est non vide puisqu'il contient la fonction constante $g(x) = m$. Ainsi $\left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^- \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, toutes les fonctions $\varphi \in E_f^-$ vérifient $\varphi \leq f \leq M$ et donc : $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a)$.

Il suit que $\left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^- \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par $M(b-a)$. Il possède donc une borne supérieure que l'on note α.

De même, $\left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^+ \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m(b-a)$. Cet ensemble possède donc une borne inférieure que l'on note β.

Montrons à-présent que $\alpha = \beta$.

Pour tout $\varphi \in E_f^-$ et $\psi \in E_f^+$ on a $\varphi \leq \psi$ et donc $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$. Il suit que $\alpha \leq \beta$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\varphi \in E_f^-$ et $\psi \in E_f^+$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

On a alors : $\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon(b-a)$.
Or par définition de α et β, on a : $\int_{[a,b]} \varphi \ \leq \ \alpha \ \leq \ \beta \ \leq \ \int_{[a,b]} \psi$.
D'où :

$$0 \leq \beta - \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon(b-a).$$

L'encadrement précédent est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc bien $\alpha = \beta$.