

Chapitre 14 : analyse asymptotique

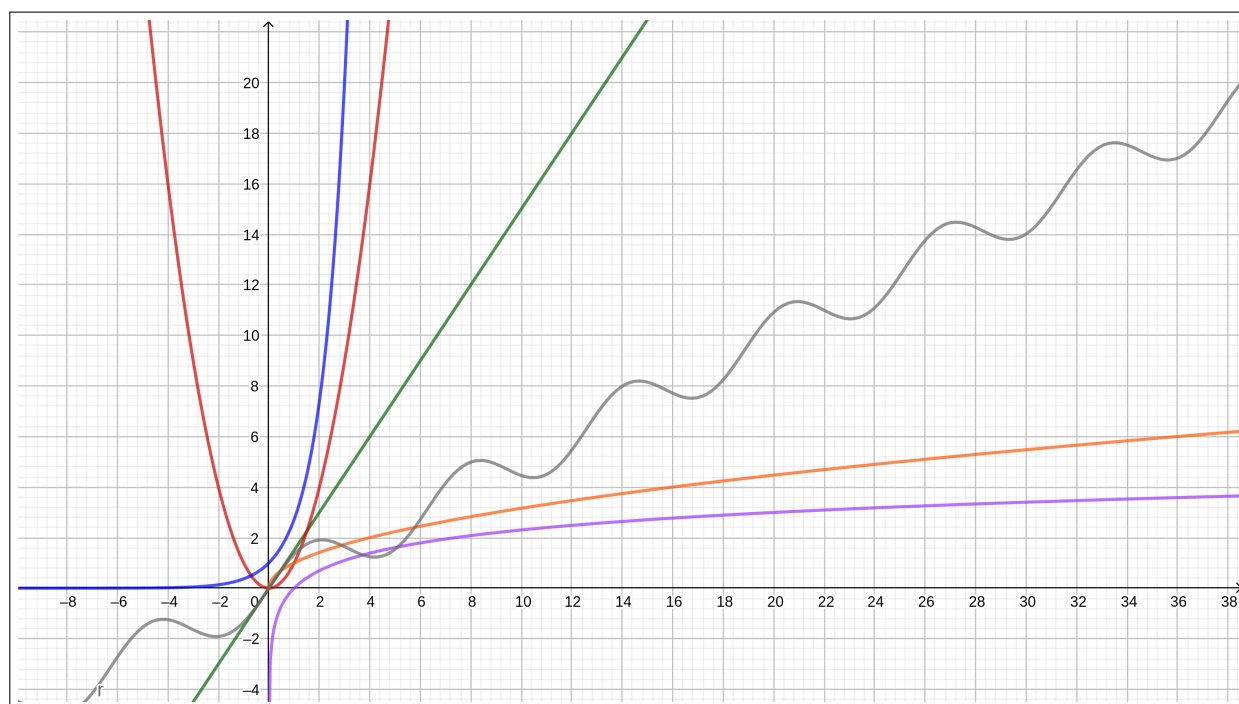
Introduction

Nous avons donné un sens précis aux limites, pour les suites et pour les fonctions. Ainsi, dire qu'une suite u tend vers $+\infty$ signifie :

Que dire de deux suites (ou deux fonctions) qui ont la même limite ? Tendent-elles vers cette limite commune « de façon analogue » ? Ou bien peut-on comparer leur comportement asymptotique ?

La réponse est oui, c'est ce que nous allons développer dans un premier temps.

Dans un second temps, nous allons comparer les comportements asymptotiques des suites et fonctions à ceux d'une famille de référence : les polynômes. Cela sera fait grâce à un nouvel outil : le développement limité.



$\exp, \ln, x \mapsto x^2, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \frac{3}{2}x$ et $x \mapsto \frac{x}{2} + \sin(x)$: toutes ces fonctions ont la même limite en $+\infty$.

1 Relations de comparaisons asymptotiques : cas des suites

Remarque : pour une suite de réels, le seul comportement asymptotique à étudier est pour $n \rightarrow +\infty$; de ce point de vue, les suites sont plus simples que les fonctions.

Comparer le comportement asymptotique de deux suites c'est les comparer pour « $n \rightarrow +\infty$ » et donc pas sur leurs *premiers termes*.

1.1 Domination, négligeabilité

Définition

Soient u et v deux suites, avec v qui ne s'annule jamais à partir d'un certain rang.

- On dit que u est **dominée** par v lorsque $\frac{u}{v}$ est bornée (à partir d'un certain rang), autrement dit :

On note alors $u_n = O(v_n)$ (et on dit "grand O").

- On dit que u est **négligeable** devant v lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$ (on dit "petit o") ; on croise encore parfois $u_n \ll v_n$ mais cette notation est désuète.

Exemples :

a) Prouver que $3n^4 - n^2 + 2n + 1 = O(n^4)$.

b) Prouver que $n^2 - 4n = o(n^5 - 1)$.

Exercice

Que dire de suites u et v qui vérifient $u = O(1)$ et $v = o(1)$?

Réponse

— La suite u

— La suite v

Les deux propositions qui suivent sont des conséquences directes des définitions et des opérations sur les limites.

Proposition (Lien entre négligeabilité et domination)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites.

- i. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
- ii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- iii. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- iv. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- v. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

Exemple : $\sin(n) = o(n)$ et $n = o(n!)$ donc $\sin(n) = o(n!)$

Proposition (Négligeabilité et domination : comportement lorsqu'on fait des opérations)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.
- ii. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
- iii. On peut remplacer tous les o par des O dans les propositions précédentes.

Remarque : la formulation a été privilégiée avec la négligeabilité qui est plus utilisée que la domination.

Proposition (Comparaisons usuelles)

- i. $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$
- ii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a > 1$, $n^\alpha = o(a^n)$
- iii. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$.

Démonstration

— Commençons par prouver que $\ln(n) = o(n)$:

$$\text{On a, } \forall n \geq 1, \ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^n = 2(\sqrt{n} - 1) \leq 2\sqrt{n}.$$

Il suit que $\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ soit $\ln(n) = o(n)$.

— Montrons à présent que $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$.

$$\text{Soit } (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall n \geq 1, \frac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln(n)}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln(n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left(\frac{\ln(n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta.$$

Or, en vertu du point précédent et par composition, $\frac{\ln(n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc bien prouvé i. $\ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$.

— Prouvons ii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a > 1$.

$$\text{On a, pour } n \geq 1, \frac{n^\alpha}{a^n} = \frac{e^{\alpha \ln(n)}}{e^{n \ln(a)}} = \exp(\alpha \ln(n) - n \ln(a)) = \exp\left(n\left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} - \ln(a)\right)\right).$$

On a $a > 1$ donc $\ln(a) > 0$ puis $n\left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} - \ln(a)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

En composant avec exp on obtient bien que $n^\alpha = o(a^n)$.

— Prouvons iii. $\forall a \in \mathbb{R}, a^n = o(n!)$.

Pour $a = 0$, le résultat est évident. Ensuite, on observe que, $\forall a \in \mathbb{R}^*, a^n = O(|a|^n)$ et donc il suffit de montrer iii. pour $a > 0$.

$$\text{Soit } n_0 = \lfloor a \rfloor. \text{ On a, pour } n \geq n_0 : \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \times \underbrace{\frac{a}{n_0+1} \times \cdots \times \frac{a}{n}}_{n-n_0 \text{ facteurs}} \leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{a}{n_0+1} \right)^{n-n_0}.$$

Or, $0 < \frac{a}{n_0+1} < 1$ donc $\left(\frac{a}{n_0+1} \right)^{n-n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a bien $a^n = o(n!)$.

Remarques :

- dans ii. et iii. on peut prendre $a = e$ et on obtient e^n .
- il faut se souvenir que :

logarithmes	$\ll$	polynômes	$\ll$	exponentielles	$\ll$	factorielle
-------------	-------	-----------	-------	----------------	-------	-------------

1.2 Equivalence

Définition

Soit u et v deux suites avec v qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

On dit que u est **équivalent** à v lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; on note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque : la proposition qui suit justifie le vocabulaire employé.

Proposition

La relation $\sim$ entre deux suites (qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est :

-
-
-

Exemples : $n^2 + 3n + 1 \sim$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ car

Proposition (définition alternative)

Soit u et v deux suites. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n = v_n + o(v_n)$.

Démonstration

$$u_n \sim v_n \iff \lim_n \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim_n \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

Remarque :

- a) la proposition précédente est fondamentale, elle annonce que l'équivalence est « l'égalité à un petit o près » ; cela sera central dans l'étude des développements limités.
- b) Lorsqu'on travaille avec une somme, on veillera à conserver uniquement le terme significatif. Par exemple, on a $e^n + n^2 + 1 \sim e^n + n^2 \sim e^n + 1$ mais la seule équivalence vraiment pertinente ici est $e^n + n^2 + 1 \sim e^n$

Proposition (Lien entre équivalents et limites)

Soit u et v deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

- Si u n'a pas de limite alors
- Si u admet une limite alors

Remarque : si u et v ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ a-t-on $u_n \sim v_n$?

Théorème (Calculs d'équivalents par opérations)

L'équivalence est compatible avec le produit, le quotient, les puissances.

Autrement dit, si u, v et w sont des suites telles que $u_n \sim v_n$ alors :

$$u_n \times w_n \sim v_n \times w_n \quad ; \quad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{w_n} \quad ; \quad \frac{w_n}{u_n} \sim \frac{w_n}{v_n} \quad ; \quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Remarques :

- a) pour alléger l'énoncé du théorème précédent, on a omis de demander que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang pour assurer l'existence des quotients.
- b) Ces propriétés se démontrent simplement en revenant aux définitions, par exemple :

Méthode (pour déterminer une limite en utilisant des équivalents)

1. on travaille par produit, quotient, puissances sur les équivalents pour simplifier l'expression à étudier ;
2. les « petits o » disparaissent ;
3. lorsque l'expression a une limite simple à déterminer, on s'arrête.

Mise en œuvre : exercices 1, 9 et 10

Exemples :

$$a) \frac{3n^2 + \cos(n)}{(5n-1)^2} \sim \frac{3n^2}{(5n)^2} \sim \frac{3n^2}{25n^2} \sim \frac{3}{25} \text{ donc } \frac{3n^2 + \cos(n)}{(5n-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{25}.$$

$$b) n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sim n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}; \text{ on en déduit } n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : on voit bien, avec ce dernier exemple, que la notion d'équivalent est plus forte que celle de limite : on a plus d'information en sachant $n \sin^2(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ qu'en sachant $n \sin^2(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

ATTENTION : avec les équivalents, il faut se méfier des sommes et des différences.

Exemple : $e^n + n^2 \sim e^n + n^2$ et $e^n + n^2 \sim e^n$ la différence donnerait $0 \sim n^2$!

ATTENTION : un « équivalent à 0 » n'a aucun sens !

2 Relations de comparaisons : cas des fonctions

Nous allons adapter aux fonctions ce qui a été vu pour les suites. La différence notable est qu'on va travailler pour des limites en $a \in \mathbb{R}$. Dans le cas de deux suites, une comparaison asymptotique se passe nécessairement pour $n \rightarrow +\infty$ (on peut écrire $u_n = o(v_n)$ sans préciser « pour $n \rightarrow +\infty$ »); pour les fonctions, il faudra systématiquement indiquer dans quel voisinage on travaille.

Tous les résultats vus pour les suites demeurent vrais dans le cas des fonctions ; on se limitera dans ce paragraphe à donner ceux qui sont les plus utiles.

Dans la suite, a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées seront définies au voisinage de a (sauf, peut-être, en a), et ne s'annuleront pas au voisinage de a (sauf, peut-être, en a). V_a désignera un voisinage de a (peut-être privé de a).

Définition

Soit f, g deux fonctions. On dit que :

- g domine f en a lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel $\frac{f}{g}$ est bornée.
On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.
- f est négligeable devant g en a lorsque
- f est équivalente à g en a lorsque

Exemple : soit deux entiers naturels $n < p$. Compléter les puissances de x avec n et p :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \quad \text{et} \quad x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^p)$$

En effet,

Définition (définition alternative de la négligeabilité)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur un voisinage V_a de a telle qu'on ait :

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in V_a, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

Remarque : On avait déjà introduit ce type de notation

Proposition (Lien entre les relations)

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si, et seulement si, $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$

Remarque : on en déduit des définitions alternatives de l'équivalence.

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x)$$

Proposition (Propriétés conservées par $\sim$)

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

- Si f admet une limite en a alors
- Si f ne s'annule pas au voisinage de a alors
- Si f est de signe constant au voisinage de a alors

Proposition (Opérations avec les relations)

Soit des fonctions f, g, h, k ; deux réels λ et μ .

- Domination et négligeabilité (on écrit uniquement pour o) :
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ alors $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \quad$.
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(k(x))$ alors $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \quad$.
- Équivalence :
 - L'équivalence n'est pas compatible avec la somme (en général).
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$ alors $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \quad$.
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ et f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \quad$.

Remarque : Pour les équivalences, iii. et ii. permettent de déduire que

Par ailleurs, en raisonnant par récurrence avec ii. on obtient

Proposition (Substitution dans les équivalents)

Soit f, g des fonctions définies au voisinage de a telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Soit φ une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow b}{\rightarrow} a$.

On a :

Démonstration

Par composition des limites : $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f \circ \varphi}{g \circ \varphi}(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f}{g}(\varphi(x)) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f}{g}(t) = 1$. ■

Remarque : on a volontairement omis le mot *composition* de l'énoncé (qui a été remplacé par *substitution*) car on ne peut composer les équivalents qu'à droite.

Théorème (Équivalents classiques)

1. Polynômes : soit P est un polynôme de degré n , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-r} x^{n-r}$.

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots ; \quad P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \dots ; \quad P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \dots$$

2. Fonctions trigonométriques : $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$

3. Exponentielle et logarithme : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

À MÉMORISER :

- Deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ont des comportements semblables en a : signe, limite.
- On peut se servir des équivalents pour déterminer des limites et donc traiter des questions comme la continuité ou la dérivabilité en un point.
- Dans les calculs avec les équivalents, on peut faire des produits, des quotients, des substitutions MAIS il est interdit d'additionner, de soustraire des équivalents et on ne compose pas les équivalents (en général).

3 Développement limités

Dans la suite, a désigne un réel (ce sera souvent 0). Les fonctions considérées (f, g) sont définies au voisinage de a (on verra sur des exemples que ce voisinage de a pourra éventuellement être privé de a).

L'objet des développements limités est d'approcher localement les fonctions par des polynômes.

En particulier, les développements limités vont donc nous fournir des équivalents polynomiaux.

3.1 Généralités

3.1.1 Définition, premiers développements limités

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie au voisinage du réel a .

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, sur un voisinage de a , on ait :

$$f(x) = f(a+h) = P(h) + R(h) \quad \text{avec} \quad R(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h^n)$$

Le polynôme $P(h) = b_0 + b_1 h + \dots + b_n h^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité.

Remarques :

- on note $DL_n(a)$ pour "développement limité d'ordre n en a ".
- La notion de négligeabilité est une notion locale : il faudra systématiquement préciser de quel voisinage il s'agit (souvent $h \rightarrow 0$).
- Le changement de variable $x = a + h$ n'est pas obligatoire mais il facilite la lisibilité. Tous les énoncés peuvent se reformuler avec x , c'est-à-dire en remplaçant les h par $x - a$.

Exemples :

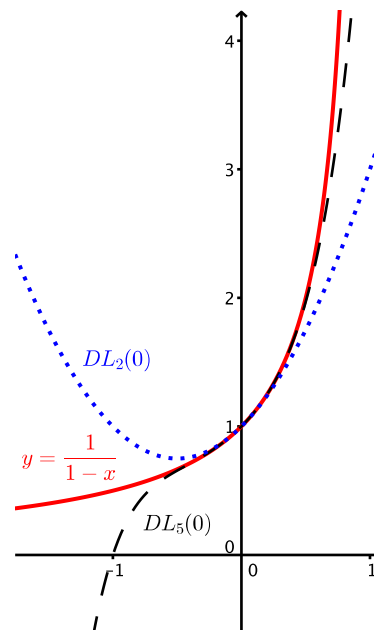
a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ au voisinage de $a = 1$

Remarque : cet exemple est un peu idiot ! En effet, pour approcher un polynôme f par un polynôme P il suffit de prendre $P = f$! Néanmoins, on peut remarquer que si l'on veut un développement limité à un ordre inférieur, il suffit de **tronquer** le développement limité, ce qui est une règle générale (que l'on verra un peu plus loin).

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $a = 0$

— A l'ordre 2 : prouver que $f(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)$

— A l'ordre n :



Remarque : si la partie régulière du DL a ses coefficients d'ordres les plus faibles nuls, c'est-à-dire si elle est de la forme $P(h) = b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \dots + b_n h^n$, alors on l'écrit sous la forme dite **normalisée** :

$$P(h) = h^k (b_k + b_{k+1} h + \dots + b_n h^{n-k})$$

3.1.2 Plusieurs développements limités d'ordres différents : quel intérêt ?

Travaillons sur un exemple : on a vu $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Quelle différence entre ces deux développements limités ? Lequel est le *meilleur* ?

Les $o(x^n)$ correspondent à l'erreur commise. Par analogie avec l'approximation décimale, c'est comme si on disait $\pi \simeq 3,1$ (à 0,1 près) et $\pi \simeq 3,14$ (à 0,01 près) .

Lorsqu'on écrit $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ on donne plus d'informations qu'avec $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. En effet, $\frac{x^2 + o(x^2)}{x} = x + x \frac{o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ donc $x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

Pour reprendre l'analogie avec l'écriture décimale, il y aurait quelque chose de paradoxal à écrire $\pi \simeq 3,14159$ à 0,1 près. En effet, si on annonce une précision à 10^{-1} , quel portée donner à des décimales plus précises ? On a $\pi \simeq 3,199999$ à 0,1 près !

De façon analogue, s'il est vrai que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$ on a aussi $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + 5x^2 + o(x)$!

Les propriétés qui ont été vues sur cet exemple sont vraies de façon générale :

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ on a :

- i. $x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$
- ii. un $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ est un $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^p)$

En conséquence,

Proposition

Si f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ obtenu par **troncature**, c'est-à-dire en supprimant tous les termes de degré supérieurs à $p+1$ (qui se retrouvent englobés dans le reste).

3.2 Formule de Taylor-Young, développements limités de référence

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$$

Exemples : donner les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes.

a) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=}$

b) $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$

c) $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$

d) $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$

e) $(1+x)^\alpha \underset{h \rightarrow 0}{=}$

f) $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$

Remarques :

- ces développements limités sont à connaître par cœur ! On va voir qu'ils permettent, par opérations, de trouver beaucoup d'autres DL .
- La formule de Taylor-Young sera prouvée lors du chapitre sur l'intégration.

3.3 Propriétés des développements limités

3.3.1 Premières propriétés

Proposition

Il y a **unicité** du développement limité : si f admet un $DL_n(a)$ alors ce développement est unique.

Démonstration

Par l'absurde. Supposons $f(x) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1h + \dots + b_ph^p + b_{p+1}h^{p+1} + \dots + b_nh^n + o(h^n)$

■

Proposition (Développements limités en 0 et parité)

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P .

- si f est paire alors P n'a que des monômes de puissances paires
- si f est impaire alors P n'a que des monômes de puissances impaires

Exemple : les DL_n de $\cos$ et $\sin$ en 0 n'ont que des monômes pairs et impairs respectivement.

Attention : ce n'est valable QUE pour les développements en 0 !

3.3.2 Opérations sur les développements limités

Proposition

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si les fonctions f et g admettent des $DL_n(a)$ alors $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ admettent aussi des $DL_n(a)$.

Plus précisément si $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_f(h) + o(h^n)$ et $g(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} P_g(h) + o(h^n)$ alors :

- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $\lambda f + \mu g$ est
- la partie régulière du $DL_n(a)$ de $f \times g$ est

Exemples :

1. Donner un $DL_4(0)$ de $f(x) = 3(x+1)^2 - 5e^x$

2. Donner un $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

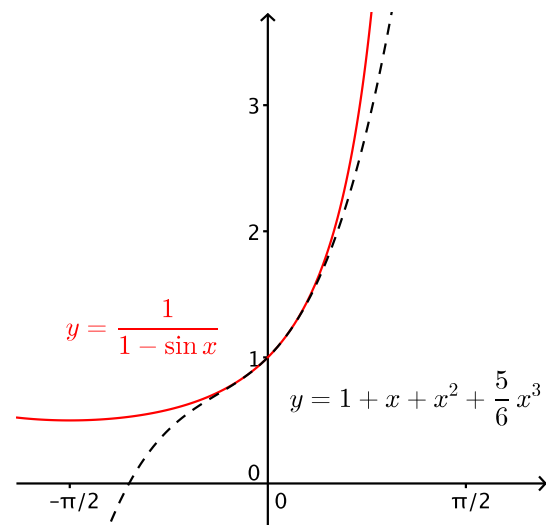
Remarque : on peut gratuitement gagner un ordre sur cet exemple. Comment ?

Proposition

Si f admet un $DL_n(0)$ et g un $DL_n(f(0))$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$.

Plus précisément, si P_f et P_g sont les parties régulières des développements de f et g alors le développement de $g \circ f$ a pour partie régulière la troncature de $P_g \circ P_f$ au degré n .

Exemple : déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}$

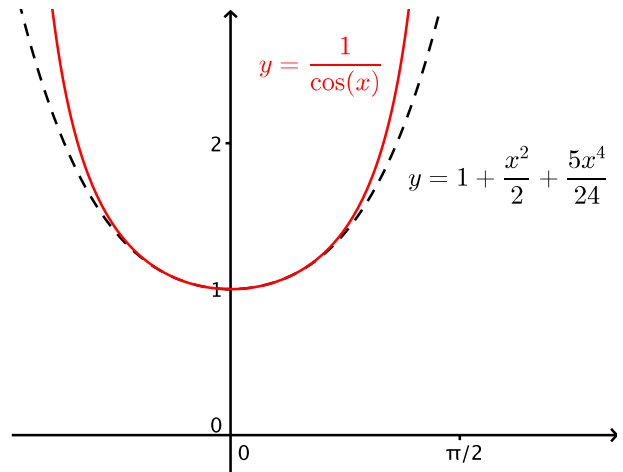


Méthode (Pour calculer le développement limité d'un quotient)

On se sert de la composition et du DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Mise en œuvre : exercices 2, 5 et 9.

Exemple : déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$



Exercice (Un nouveau DL de référence)

Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan$.

Réponse

On a

3.3.3 Développement d'une primitive, de la dérivée

Proposition

Soit f une fonction et F une primitive de f . Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de partie régulière $F(0) + \int P$.

Remarque : on a noté $\int P$ la primitive de P dont le coefficient constant est 0.

Exemples : Donner les $DL_5(0)$ de $\ln(1-x)$ et de $\text{Arctan}(x)$.

Proposition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et f' admettent des DL d'ordres respectifs $n+1$ et n en a . De plus, le DL_n de f' s'obtient en dérivant terme-à-terme le DL_{n+1} de f .

Remarque : l'existence des DL est assurée par

Exemple : rappeler le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ puis retrouver celui de $\frac{1}{1+x}$.

3.4 Applications

3.4.1 Etude locale d'une fonction

La formule de Taylor Young permet d'avoir un DL_n pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. La réciproque est-elle vraie? Si f admet un DL_n alors f est-elle nécessairement de classe $\mathcal{C}^n$?

Proposition

Si f est définie en a :

- i. si f admet un $DL_0(a) : f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + o(1)$ alors f est continue en a et $f(a) = b_0$;
- ii. si f admet un $DL_1(a) : f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 h + o(h)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$;
- iii. **ATTENTION :** si f admet un $DL_n(a)$ avec $n > 1$ alors on ne peut pas conclure que f est n fois dérivable en a .

Exemple : la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ vérifie $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$.

Elle se prolonge donc par continuité en 0 en posant

Le prolongement ainsi obtenu est dérivable en 0 car :

Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) =$ et donc on déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ (en 0).

Pourtant, $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$ donc f admet un $DL_2(0)$ (de partie régulière nulle).

Remarque : dans la proposition précédente, si f n'est pas définie en a , l'existence d'un DL_0 en a permet de prolonger f par continuité en a ; l'existence d'un DL_1 assure que le prolongement obtenu est dérivable en a .

Exercice

On considère, pour $x \neq 0$, la fonction $f(x) = \frac{\cos(x) - e^x}{x}$.

1. Prouver que f est prolongeable par continuité.
2. Justifiez que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer une équation de sa tangente T en 0.
3. Précisez les positions relatives de T et de $\mathcal{C}_f$.

Réponse

On a

Proposition

Si f admet un DL d'ordre au moins 2 en a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x - a) + b_p(x - a)^p + o((x - a)^p)$ avec $b_p \neq 0$ alors la courbe de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite T_a d'équation $y = b_0 + b_1(x - a)$.

De plus, au voisinage de a , les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de T au point d'abscisse a sont déterminées par le signe de $b_p(x - a)^p$.

3.4.2 Etude au voisinage de l'infini

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle $]M; +\infty[$), $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Remarques :

- Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ et $y = ax + b$ vont devenir très proches au voisinage de $+\infty$.
- Si $a = 0$ on parle d'*asymptote horizontale*, sinon d'*asymptote oblique*.
- La définition s'adapte simplement pour une asymptote en $-\infty$.

Méthode (Pour étudier une fonction au voisinage de $+\infty$)

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on fait un développement limité pour $h \rightarrow 0$.

Mise en œuvre : exercices 3 et 10.

Exercice

On considère, pour $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

- a) Justifier que f est définie au voisinage de $+\infty$.
- b) Prouver que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
- c) En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- d) Précisez les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote.

Réponse

On a