

# Chapitre 16 - EV de dimension finie

## 1 Définition et exemples de référence

### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel différent de  $\{\vec{0}\}$ .

On dit que  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de  $E$ . Dans le cas contraire,  $E$  est dit de **dimension infinie**.

Exemples :

a)

b)

c)

d)  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie. En effet,

e) Un autre exemple d'espace de dimension infinie :

## 2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

### Théorème (de la base extraite)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, non-réduit au vecteur nul.

De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base de  $E$ .

### Démonstration

■

Ce théorème a une conséquence fondamentale :

**Tout espace vectoriel de dimension finie**

**Proposition**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{F}$  une famille génératrice finie de  $E$ .  
Alors,  $|\mathcal{F}|$  est un majorant pour le cardinal des familles libres de  $E$ .

Autrement dit :

**Démonstration**

■

**Théorème (dit « de la base incomplète »)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, non-réduit au vecteur nul.  
Toute famille libre  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$  de  $E$  peut-être complétée en une base de  $E$ .

**Exemples :**

- a) On se place dans  $\mathbb{R}^3$  et on considère  $\vec{u} = (1, 2, 0)$  et  $\vec{v} = (-3, 4, 0)$ .
- $(\vec{u}, \vec{v})$  est une famille libre :
  - $(\vec{u}, \vec{v}, (0, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  :

- b)  $(X^2 + X + 1, X^2 - X + 1)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On peut la compléter en une base en lui ajoutant le polynôme  $X^2$  :

### 3 Dimension d'un espace vectoriel

#### Définition

Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors :

- toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal ;
- ce cardinal commun est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel.
- On note  $\dim(E)$  la dimension de  $E$  et on pose  $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$ .

#### Démonstration

Il faut démontrer que



#### Méthode (Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel)

On exhibe

*Mise en œuvre : exercices 1, 4 et 6.*

**Exemples :**

- a)  $\dim(\mathbb{K}^3) =$
- b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dim \mathbb{K}^n =$
- c)  $\forall n \in \mathbb{N}, \dim \mathbb{K}_n[X] =$
- d)  $E = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / (x^2 + 1)y' + 3y = 0\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension

- e)  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 (une **droite vectorielle**) : une de ses bases est
- f)  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 (un **plan vectoriel**) : une de ses bases est

### Proposition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Alors :

- toute famille de  $m$  vecteurs avec  $m > n$  est
- toute famille de  $p$  vecteurs avec  $p < n$  n'est pas
- toute famille libre de  $n$  vecteurs est
- toute famille génératrice de  $n$  vecteurs est

**Remarque :** dans un espace de dimension  $n$ , les familles de  $n$  vecteurs sont dites **maximales**. (C'est le plus grand cardinal possible pour les familles libres).

### Méthode (Pour construire une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ )

- Il faut trouver une famille libre **ou** génératrice de  $n$  vecteurs.
- Si on a une famille génératrice, on retire des vecteurs jusqu'à en avoir  $n$  en veillant à ce que la famille demeure génératrice.
- Si on a une famille libre, on ajoute des vecteurs jusqu'à en avoir  $n$  en veillant à ce que la famille demeure libre.

Mise en œuvre : exercices 1, 4, 5 et 6.

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , soit  $P = X^2 + X + 1$ ,  $Q = X^3 + X$  et  $R = 3X + 2$ .

- a)  $(P, Q, R)$  est libre car
- b)  $(P, Q, R)$  n'est pas génératrice de  $\mathbb{R}_3[X]$  car
- c)  $(P, Q, R, S)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  avec  $S =$

**Remarque :** il y avait d'autres possibilités pour  $S$  ! Par exemple  $S = X^3$ . (Exercice)

## 4 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

### Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- Alors  $F$  est
- De plus,  $\dim(F)$

### Méthode (Pour montrer que deux sous-espaces $F$ et $G$ sont égaux)

- C'est une égalité entre ensembles, on peut toujours montrer et
- Si on connaît la dimension de  $F$  alors

Mise en œuvre : exercices 1, 4 et 7.

**Théorème (Formule de Grassmann)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors les sous-espaces vectoriels  $F + G$  et  $F \cap G$  sont de dimension finie, et on a :

**Remarque :** pour mémoire,  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .

## 5 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

**Proposition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i.  $E = F \oplus G$ .
- ii.  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$  et  $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ .
- iii.  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$  et  $E = F + G$ .

**Démonstration**

On prouve une équivalence, par exemple :

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les sous espaces :

$$F = \{(x, y, z) / 3x + 2y - z = 0\} \quad ; \quad G = \{(x, y, z) / x - 5y + 2z = 0\} \quad ; \quad H = \text{Vect}(1, 0, 2)$$

a)  $F$  et  $G$  ne sont pas supplémentaires car

b)  $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$  car

**Proposition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  admet un sous-espace vectoriel supplémentaire  $G$ .

De plus :

$$\dim(G) =$$

**Remarque :** lorsque  $F \neq E$  il y a une infinité de supplémentaires. Par exemple, dans le plan, une droite vectorielle admet n'importe quelle autre droite vectorielle (non confondue) comme supplémentaire.

## Démonstration



## Définition

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs, dans un espace vectoriel  $E$ .

On appelle **rang** de  $\mathcal{F}$  la dimension de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$ . On le note  $\text{rg}(\mathcal{F})$ .

**Remarque :** on a demandé un nombre fini de vecteurs mais pas nécessairement que l'espace soit de dimension finie.

**Exemples :**

a)  $\text{rg}(\cos ; \sin) =$

b) Déterminons  $\text{rg}((1; 2; 3) ; (2; 3; 4) ; (3; 4; 5))$

c) Déterminons  $\text{rg}(2X^2 + X ; X^2 - X ; X^2 + 2X)$

**Remarque :**

## Proposition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ . On a :

$$\text{rg}(\mathcal{F})$$