

Chapitre 18 : applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E , F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1 Généralités

1.1 Définitions et exemples

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$ une application.

— On dit que u est une **application linéaire** de E dans F quand u respecte les combinaisons linéaires, autrement dit quand :

— On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque : pour démontrer qu'une application u est linéaire, on peut montrer directement qu'elle respecte les combinaisons linéaires ou bien montrer qu'elle respecte l'addition ET le produit par un scalaire. On peut aussi montrer que $u(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y})$, pour tous $\lambda, \vec{x}$ et $\vec{y}$.

Exemples :

a) L'application nulle $n : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{cases}$

b) La dérivation des polynômes : $D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$.

c) $\begin{cases} \mathcal{C}^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0, 1]} f \end{cases}$.

d) $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (-x + 2y, 0, y) \end{cases}$.

e) $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases}$ n'est pas linéaire. En effet,

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{i. } u(\vec{0}_E) = \quad \quad \quad \text{ii. } \forall \vec{x} \in E, u(-\vec{x}) =$$

Démonstration

$$u(\vec{0}_E) = \quad \quad \quad \text{et } \forall \vec{x} \in E, u(-\vec{x}) =$$

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Lorsque $F = E$, on dit que u est un
- Lorsque u est bijective, on dit que u est un
- Un endomorphisme qui est un isomorphisme est appelé un
- L'ensemble des automorphismes de E est appelé **groupe linéaire** de E et noté $GL(E)$.

Remarque : on a déjà vu un *groupe linéaire*, c'était dans le chapitre sur

Il y a un lien profond entre applications linéaires et matrices, ce sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

Exemples :

a) $D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\text{Id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ \vec{x} & \mapsto \vec{x} \end{cases}$ est un automorphisme de E .

Exercice

On considère $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$. Prouver que $u \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Réponse

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x, y) = (a, b)$. On a :

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition

- Composition d'applications linéaires :
- Combinaison linéaire d'applications linéaires :

Remarques :

- a) $\mathcal{L}(E, F)$ est un
- b) La composition est **bilinéaire**, c'est-à-dire :
- c) La composition est **associative**, c'est-à-dire :

Proposition

Soit u un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ alors u^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{L}(F, E)$.

De plus, $u \circ u^{-1} =$ et $u^{-1} \circ u =$.

Démonstration

Il faut montrer que

Remarque : dans $\mathcal{L}(E)$, les endomorphismes peuvent se composer avec eux-mêmes. On a une notation spécifique, qui vient du lien entre matrices en endomorphismes :

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit par récurrence l'endomorphisme u^k de la façon suivante :

Si $u \in GL(E)$ alors on peut étendre cette notation :

Remarque : Id_E est l'**élément neutre** pour la composition dans $GL(E)$.

1.3 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- i. L'**image directe** d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F :
- ii. L'**image réciproque** d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E :

Démonstration

On traite uniquement

■

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est stable par u lorsque

u induit alors un endomorphisme de $F : u|_F \left\{ \right.$

Exemple : la dérivation des polynômes est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. $\mathbb{K}_2[X]$ est stable par la dérivation (pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$, on a $P' \in \mathbb{K}_2[X]$) et donc la dérivation est également un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Remarque : il faut faire attention aux notations ! Si on note D la dérivation des polynômes, on ne peut pas écrire $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ car ces deux ensembles n'ont aucun élément en commun (*veillez à bien comprendre cela*) !

Ces deux endomorphismes étant différents, si on veut des notations pour les deux, elles devront être différentes. Ainsi, si on note D la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ induit par D sera noté $D|_{\mathbb{K}_2[X]}$.

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau** de u et on note $\text{Ker}(u)$, l'ensemble $\{\vec{x} \in E / u(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.
- On appelle **image** de u et on note $\text{Im}(u)$, $\{u(\vec{x}), \vec{x} \in E\}$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E , $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\text{Ker}(u) =$

De façon analogue, $\text{Im}(u) =$

Exemple : déterminer le noyau et l'image de $D : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $(\vec{x}_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille génératrice de E alors $(u(\vec{x}_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.

Démonstration

$\text{Im}(u) = \{u(\vec{z}) / \vec{z} \in E\}$. Or, $E = \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ autrement dit : $\forall \vec{z} \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n / \vec{z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$.

On a donc :

$$\text{Im}(u) = \left\{ u \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i \right) / (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{x}_i) / (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\} = \text{Vect} (u(\vec{x}_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}.$$

Méthode (Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel)

On a plusieurs possibilités :

- Appliquer la définition :
- Exprimer cet ensemble comme
- **(Nouveau)** Envisager cet ensemble comme

Mise en œuvre : exercice d'application ci-dessous et exercice 2.

Exemple : $\Gamma = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / y'' + 2y' + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car

Remarque :

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

- u est injective si, et seulement si : $\text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$;
- u est surjective si, et seulement si : $\text{Im}(u) = F$.

Démonstration

- Le second point est évident car
- Supposons que u soit injective, alors

Réciproquement, si $\text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$

Exercice

On définit l'application u en posant, pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$, $u(P) = P - XP'$.

1. Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$.
2. A-t-on $u \in GL(\mathbb{K}_2[X])$?

Réponse

1) Tout d'abord,

Remarque : l'exercice précédent illustre une situation qu'on trouve souvent en exercice :

Méthode (Pour montrer qu'une application u est un endomorphisme d'un espace E)

Il y a deux choses à vérifier :

- 1.
- 2.

Mise en œuvre : exercices 6 et 12.

2 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

2.1 Homothéties

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. L'**homothétie** de rapport λ est $h_\lambda : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \lambda\vec{x}. \end{cases}$

Remarques :

1. Quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, h_λ est bien un endomorphisme de E .
2. Pour $\lambda \in \{0; 1\}$, on obtient des endomorphismes particuliers :

Proposition

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

Remarque : la démonstration sera vue en TD.

2.2 Projecteurs et symétries

Définition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , c'est-à-dire que

$$\forall \vec{x} \in E,$$

- On appelle **projection sur F parallèlement à G** (ou **projecteur**) l'application linéaire :

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{cases}.$$

- On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application linéaire :

$$s : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{cases}.$$

Remarques :

- a) La linéarité des projections et des symétries est évidente.
- b) Il faut toujours préciser E et F qui sont les **éléments caractéristiques**. Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire :

Dans le plan et l'espace, vous avez l'habitude de faire des **projections orthogonales**. Elles reposent sur le produit scalaire usuel et l'existence d'un supplémentaire orthogonal. Nous définirons ces objets (dans un cadre général) lors d'un chapitre ultérieur.

Proposition

Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires de E , soit p_F la projection sur F parallèlement à G . Alors :

- i. la projection sur G parallèlement à F est $p_G =$;
- ii. la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

Démonstration

Il suffit d'écrire la décomposition des éléments de E selon la somme $E = F \oplus G$ et d'utiliser les définitions. ■

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

- i. u est un projecteur si, et seulement si, $u^2 = u$.
On a alors $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ et u est la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$.
- ii. u est une symétrie si, et seulement si, $u^2 = \text{Id}$.
On a alors $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id})$ et u est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et parallèlement à $\text{Ker}(u + \text{Id})$.

Démonstration

On se limite au i. Il s'agit de prouver une équivalence, on raisonne par double implication.

$\Rightarrow$:

$\Leftarrow$: soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = u$. Il faut qu'on prouve que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$ et que u est la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$.

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{\quad}_{\in \text{Ker}(u)} + \underbrace{\quad}_{\in \text{Im}(u)} : (\star); \text{ ceci prouve que}$$

Maintenant, prouvons que la somme est directe :

Enfin, l'écriture $(\star)$ étant unique, u est bien la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$.

Remarque : lorsqu'une application u vérifie $u \circ u = \text{Id}$, on dit que u est une

Exemples :

- a) On travaille dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'endomorphisme $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ est la projection sur $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à $\text{Vect}(\vec{k})$.

- b) Prouver que $z \mapsto \bar{z}$ est une symétrie de $\mathbb{C}$. (On précisera ses *éléments caractéristiques*).

- c) Prouver que $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(-X) \end{cases}$ est une symétrie. (On précisera ses *éléments caractéristiques*).

3 Applications linéaires et bases

3.1 Mode de définition d'une application linéaire

Proposition

Soit F et G des sous-espaces supplémentaires de E , soit u une application linéaire définie sur E .
On connaît parfaitement u lorsqu'on connaît ses restrictions à F et à G .

Exemple :

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est déterminée de façon unique par les images des éléments d'une base quelconque de E .

Démonstration

Soit $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de $E : \forall \vec{x} \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) / \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$

On a alors, $u(\vec{x}) =$

Il suit que si l'on connaît les images de $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ alors on sait calculer $u(\vec{x})$. ■

Remarques :

- On a prouvé que connaître les images par u des vecteurs d'une base de E détermine u mais on n'a pas insisté sur l'unicité.
- Ce résultat est vrai en dimension finie (ce qui est le contexte de la démonstration) et infinie. Dans cette dernière situation, il faut donner du sens à $\sum x_i \vec{e}_i$ qui est une somme a priori infinie ; on a déjà rencontré cette situation. Dans quel contexte ? Comment avait-on réglé cette difficulté ?

Exemples :

- a) Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\phi(1, 0) = (2, 1)$ et $\phi(0, 1) = (-1, 3)$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) =$

- b) On considère $S : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \int_0^1 P(x) dx \end{cases}$. $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$ par linéarité de l'intégrale.
Calculons les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par S :

$$S(1) =$$

$$S(X) =$$

$$S(X^2) =$$

On en déduit que, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ on a :

$$S(P) =$$

$$\text{Par exemple } S(3 + X - 5X^2) =$$

Remarque : soit un « petit » intervalle $[a; b]$. Soit l'application linéaire $u : \begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_{[a; b]} f \end{cases}$.

Construire une méthode d'intégration élémentaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sur $[a; b]$, c'est trouver une application linéaire $\hat{u} : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\hat{u}(P) = u(P)$ et approcher u par $\hat{u}$.

Exercice

On travaille dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on définit une application linéaire f en posant :

$$f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \quad ; \quad f(\vec{j}) = -4\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Démontrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

3.2 Isomorphismes

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, dont $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base ; soit F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (qui peut être de dimension finie ou pas) et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- i. u est injective si, et seulement si, $(u(\vec{e}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille libre de F ;
- ii. u est surjective si, et seulement si, $(u(\vec{e}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille génératrice de F ;
- iii. u est bijective si, et seulement si, $(u(\vec{e}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de F .

Démonstration

On revient aux définitions :

- i. u est injective si, et seulement si,

- ii. u est surjective si, et seulement si,

- iii. est une conséquence de i. et ii. car u est bijective si, et seulement si,

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

Exemple : Montrer que l'application linéaire $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \\ P & \mapsto \end{cases} \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ (P(0), P(1), P(2)) \end{matrix}$ est un isomorphisme.

Définition

On dit de deux espaces vectoriels E et F qu'ils sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \rightarrow F$.

Proposition

Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.

Démonstration

Supposons que E et F soient de même dimension finie n .

Réciproquement, supposons que E et F sont isomorphes. Alors,

4 Rang d'une application linéaire

Définition

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, avec E de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de u**

On le note

Exemples :

a) La dérivation $\mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$

b) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la trace

c) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la transposition

Remarque : $\text{Im}(u)$ est un sous-espace de dimension finie et $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \leq n$.

Proposition

Composer (à gauche ou à droite) par un isomorphisme

Proposition

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\text{rg}(v \circ u)$$

Théorème (du rang)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie.

Remarque : l'idée du Théorème du Rang est que les dimensions de E sont soit dans le noyau, soit « deviennent » celles de $\text{Im}(u)$.

Démonstration

Soit $n = \dim E$. De deux choses l'une :

- Soit $\text{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$ et alors

- Sinon, soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une base de $\text{Ker}(u)$.
On peut alors compléter cette base en une base de E :

Remarque : on pouvait directement raisonner en considérant un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E (mais les dimensions sont alors « moins visibles »).

5 Equations linéaires

Définition

Une équation est dite **linéaire** quand elle est de la forme $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$ avec :

- u
- $\vec{x}$
- $\vec{b}$

Exemples :

a) Le système linéaire
$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 2 \end{cases}$$

b) De façon générale,

c) L'équation différentielle $y' - 3y = \cos x$

d) De façon générale,

Proposition

Soit $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$.

$\vec{x}$ est solution de (Eq) si, et seulement si,

Démonstration

Dire que $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire (Eq) c'est dire que :

Pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \text{ est solution de } (Eq) \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$ est donc

Remarque : ce type d'ensemble (appelé *espace affine*) n'est pas un espace vectoriel sauf quand

Proposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

L'ensemble des suites u vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration

Clairement, l'ensemble S cherché est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $\begin{cases} S \rightarrow \mathbb{K}^2 \\ u \mapsto (u_0, u_1) \end{cases}$ est linéaire. Elle est injective et surjective (*voyez-vous bien pourquoi ?*), c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit $\dim S = \dim \mathbb{K}^2 = 2$ et S est bien un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : on avait donné, lors du chapitre 8 sur les suites, la forme d'une telle suite. On avait alors donné une formule, dont on pouvait vérifier qu'elle correspondait bien à des solutions. Cette formule décrit un plan vectoriel, on peut maintenant conclure qu'on les a toutes.

6 Formes linéaires et hyperplans

Définition

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $E \rightarrow \mathbb{K}$.

Remarque : $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, sa dimension est

Exemple : $P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}_2[X]$. En effet :

Exercice

Expliquez pourquoi choisir une forme linéaire sur $\mathbb{K}_2[X]$ revient à choisir trois scalaires.

Réponse

Choisir une forme linéaire sur $\mathbb{K}_2[X]$ c'est choisir les images dans $\mathbb{K}$

Définition

On appelle **hyperplan de E** tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Remarques :

1. Quel est le noyau de la forme linéaire nulle de E ?
2. Quelle est la différence entre la forme linéaire nulle de E et l'application linéaire nulle de E ?

Exemples :

1. l'ensemble P de $\mathbb{R}^3$ décrit par l'équation $3x + 2y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. En effet,
2. L'hyperplan de $\mathbb{K}_2[X]$ qui est le noyau de $u : P \mapsto P(1)$ est

Remarque : si E est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \dots; \vec{e}_n)$ est une base de E , les vecteurs de E sont de la forme $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ où les x_i sont les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit un hyperplan H , noyau d'une forme linéaire u . On a :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} \in H \iff u(\vec{x}) = 0 \iff u\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i u(\vec{e}_i) = 0$$

Les $u(\vec{e}_i)$ étant des scalaires, on a obtenu une **équation linéaire de H** sur les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition

Les hyperplans d'un espace de dimension finie n sont des sous-espaces de dimension

Démonstration

Il suffit

Proposition

Soit $H = \text{Ker}(u)$ un hyperplan de E , $\vec{x}$ un vecteur de E qui n'est pas dans H .

On a : $E = H \oplus \text{Vect}(\vec{x})$.

Démonstration

Soit $\vec{x}$ est un vecteur de E qui n'est pas dans H , il est donc non nul et $\dim(\text{Vect}(\vec{x})) = 1$.

Montrons que $\text{Vect}(\vec{x}) \cap H = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{x}) \cap H$. Comme $\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{x})$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Si on avait $\lambda \neq 0$ alors on aurait $\vec{x} = -\frac{1}{\lambda} \vec{y} \in H$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\vec{x} \notin H$.

On a donc $\lambda = 0$ et donc $\vec{y} = \vec{0}$ d'où $\text{Vect}(\vec{x}) \cap H = \vec{0}$.

H et $\text{Vect}(\vec{x})$ sont en somme directe, on a $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(\vec{x})) = \dim(E)$ donc $E = H \oplus \text{Vect}(\vec{x})$. ■

Remarque : il y a une arnaque dans la preuve... mais où ?