Chapitre 19 : variables aléatoires

Dans ce chapitre $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Généralités

1.1 Définition, premiers exemples

Introduction
Historiquement, la notion de variable aléatoire a été introduite pour l'étude des gains dans des jeux d'argent. Doit-on jouer ? Combien d'argent peut-on espérer gagner ? Puis, une question à laquelle on ne répondra pas (mais qui intéresse tous les joueurs) : existe-t-il des façons de jouer qui favorisent le gain ?
De façon générale, **une variable aléatoire est une quantité numérique associée au résultat d'une expérience aléatoire**.

> **Définition**
> Une **variable aléatoire** sur Ω est une application $X : \Omega \to E$ où E désigne un ensemble.
> Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ on dit que X est une variable aléatoire réelle, lorsque $E \subset \mathbb{C}$, on dit que X est complexe.

Exemples : Les deux exemples qui suivent vont être utilisés pour illustrer toutes les notations qui suivront dans ce paragraphe.

a) On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Soit X le nombre de « Pile » obtenus.
L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ (en notant PF l'issue « obtenir Pile puis Face ») et on a :
$$X(PP) = 2 \quad ; \quad X(PF) = 1 \quad ; \quad X(FP) = 1 \quad ; \quad X(FF) = 0.$$

b) On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit Y le produit des faces obtenues.
On peut modéliser cette expérience aléatoire en considérant qu'une de ses issues est le couple des résultats obtenus, l'univers est alors $[\![1, 6]\!]^2$. On a :
$$Y : \left\{ \begin{array}{l} [\![1, 6]\!]^2 \to \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto i \times j \end{array} \right. .$$
Par exemple, $Y((3, 5)) = 15$ et $Y((6, 2)) = Y((4, 3)) = 12$.

Remarque : dans l'exemple précédent, la modélisation du lancé de deux dés n'est pas unique. Par exemple, quelle différence faire entre les issues $(3, 2)$ et $(2, 3)$ si les dés sont indiscernables ? Pour lever cette difficulté on peut prendre pour issues les couples $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$ avec $i \leqslant j$.
Qu'il soit possible de choisir entre plusieurs modélisations pour une expérience aléatoire n'est pas une difficulté en soi. Néanmoins, il est important de comprendre quels sont les qualités et les défauts de la modélisation choisie dans la description de l'expérience.

Notation : Ω étant fini, son image par X est une partie finie de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^* = |X(\Omega)|$; on note :
$$X(\Omega) = \{x_1 \ ; \ \dots \ ; \ x_n\} \ .$$
On dit que X est une variable aléatoire réelle finie ou encore que X prend un nombre fini de valeurs.

Exemples :

a) Pour le lancers de pièce, le nombre X de Pile prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

b) Dans le cas du lancé de deux dés, le produit des résultats est Y qui prend ses valeurs dans :
$$Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}.$$

Ces deux exemples illustrent une situation fréquente : l'univers peut être difficile à décrire (et ça peut d'ailleurs ne pas être utile), par contre <u>on décrira toujours l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire</u>.

Notation :
On a deux ensembles « reliés » par la variable aléatoire $X : \Omega$ et $X(\Omega)$.

— Soit $A \subset X(\Omega)$. Pour décrire l'événement constitué des issues $\omega \in \Omega$ telles que $X(\omega) \in A$ plutôt que d'utiliser la notation $X^{-1}(A)$ on va simplement écrire $(X \in A)$ (ou $\{X \in A\}$).

— De façon analogue, si $x \in \mathbb{R}$, on considérera les événements $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, ...

Exemples :

a) Dans le cas de deux lancers de pièce, soit l'événement E : « obtenir exactement une fois Pile ». On peut détailler $E = \{PF, FP\} \subset \Omega$ mais on préférera le noter $(X = 1)$.

b) Dans le cas du lancé de deux dés, l'événement « le produit des résultats est strictement inférieur à 5 » sera noté $(Y < 5)$.
Il correspond à la partie $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}$ de l'univers.

Remarques :

1. Dans ce chapitre nous étudierons les variables aléatoires réelles ou complexes, c'est-à-dire des applications $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par souci de simplification, tous les exemples seront réels (il suffit de traiter parties réelles et imaginaires pour avoir le cas complexe).
2. Soit $n > 1$. Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{K}^n$ sera appelée *vecteur aléatoire* (réel ou complexe).
3. L'ensemble des variables aléatoires sur Ω est $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (exemple de référence).

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple : considérons à nouveau le lancé de deux dés ainsi que la variable aléatoire Y qui vaut le produit des faces obtenues. Rajoutons une hypothèse : les dés sont équilibrés.
Cela assure qu'on a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$; le calcul de la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ se ramène donc à un calcul de dénombrement : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.
On a : $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(\{(1,4),(2,2),(4,1)\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.
De façon analogue : $\mathbb{P}(Y \in \{1,2,3\}) = \mathbb{P}(\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}) = \dfrac{5}{36}$.

Pour calculer les probabilités d'évenements liés à Y on se ramène à Ω. On va voir que la probabilité sur Ω induit une nouvelle probabilité sur $Y(\Omega)$.

Proposition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

— L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$ définit une probabilité sur $X(\Omega)$.

— $\mathbb{P}_X$ est appelée **loi (de probabilité) de** X.

— $X(\Omega)$ est fini donc $\mathbb{P}_X$ est complètement définie lorsqu'on connaît $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$.

Remarque : on utilisera indifféremment $\mathbb{P}(X = x_i)$ ou $\mathbb{P}_X(\{x_i\})$, qu'on pourra aussi noter $\mathbb{P}_X(x_i)$.

Exemple : soit X le nombre de « Pile » obtenus en lançant deux fois une pièce équilibrée.

On a déjà vu que X prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. Puisqu'on a équiprobabilité sur l'univers, on peut en déduire la loi de X :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

On a $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X \in \{1,2\}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{3}{4}$.

Attention : il y a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ mais pas sur $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.
C'est une situation fréquente et il faut bien faire la différence entre les deux univers : Ω et $X(\Omega)$.

Méthode (Pour donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X)

1. On décrit l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$;
2. Donner $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour toutes les valeurs prises par X.

Lorsque X prend un nombre assez faible de valeurs, on peut résumer ces informations dans un tableau :

x_i	x_1	$\dots$	x_n	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	$\dots$	p_n	1

Mise en œuvre : exercices 1, 2, 3 et 5.

Remarques :

a) la dernière colonne sert à ne pas oublier que la somme des probabilités vaut 1 ; elle n'est pas indispensable mais permet d'éviter des erreurs.

b) La famille $(p_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une famille de réels positifs de somme 1, c'est une *distribution de probabilités*.

c) Si les variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité, on note $X \sim Y$.

Exemple : une urne contient 10 boules : 7 rouges et 3 noires, qui sont indiscernables au toucher.
On tire, successivement et sans remises, trois boules de l'urne. Soit X le nombre de boules rouges, déterminons la loi de X.

— On a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

— Une issue de l'expérience aléatoire est un sous-ensemble de 3 boules parmi les 10 de l'urne, le cardinal de l'univers est donc $\binom{10}{3}$. Puisque les boules sont indiscernables, on a équiprobabilité sur cet univers et on en déduit la loi de X :

x_i	0	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$					1

Proposition (Image d'une variable aléatoire par une fonction)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
$\varphi(X)$ est une nouvelle variable aléatoire dont la loi de probabilité se déduit de celle de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_{\varphi(X)}(x) = \mathbb{P}\left(\varphi(X) = x\right) = \mathbb{P}\left(X \in \varphi^{-1}(\{x\})\right) = \mathbb{P}_X\left(\varphi^{-1}(\{x\})\right)$$

Exemple : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie, X est le nombre de « Pile » obtenus.
On connaît la loi de X :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

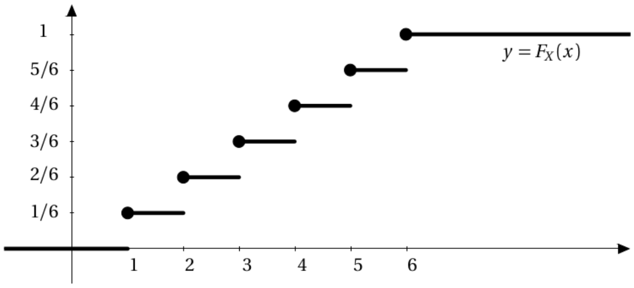
On joue selon la règle suivante : la participation coute 10€ et chaque « Pile » obtenu rapporte 8€.
Le **gain**, c'est-à-dire la différence entre ce qui est gagné et dépensé, est alors la variable aléatoire $G = 8X - 10$.
Déterminons la loi de G :

1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction $F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$.

Exemple : on lance un dé équilibré et on considère X, la valeur de la face visible. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est :



Méthode (Pour déterminer la loi d'une VA dont on connaît la fonction de répartition F_X)
1. Les valeurs prises par X sont les points de discontinuité de F_X. On les note $x_1 < \cdots < x_n$.
2. On a $\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$ puis, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Exemple : Soit Z la VA dont la fonction de répartition est : $F_Z(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < -3 \\ 0,2 & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \\ 0,7 & \text{si } -1 \leqslant x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leqslant x \end{array} \right.$.

La loi de probabilité de Z est :

Proposition (Propriétés des fonctions de répartitions)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$, F_X sa fonction de répartition.

i. F_X est positive.

ii. F_X est une fonction en escalier.

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

iv. F_X est croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Longrightarrow F_X(x) \leqslant F_X(y)$.

Méthode (Pour prouver qu'une fonction f n'est pas une fonction de répartition)
Il suffit que f ne vérifie par une des propriétés de la propositions précédentes.

2 Espérance d'une variable aléatoire : un indicateur de position

Notations : X désigne une variable aléatoire réelle ou complexe sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que X prend n valeurs distinctes : $x_1, \ldots, x_n$.

Définition
L'**espérance** de X est le nombre (réel ou complexe) noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \ .$$

Remarques :

1. On note souvent (de façon abusive) $E(X)=\sum x_i\mathbb{P}(X=x_i)$ plutôt que $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{P}(X=x_i)$.

   Par défaut, lorsque le symbole $\sum$ est incomplet, cela signifie que la somme porte sur toutes les valeurs que prend la variable aléatoire.
2. On peut réécrire $E(X)$ en faisant apparaître les issues de l'expérience aléatoire : $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Exemples :

1. On considère X le nombre de « Pile » obtenus en deux lancés d'une pièce équilibrée. On rappelle que l'univers est $\Omega=\{PP,PF,FP,FF\}$ et que la loi de X est :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

   Calculons $E(X)$ avec les deux formules :
   — $E(X)=\sum x_i\mathbb{P}(X=x_i)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}=1$;
   — $$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\&=X(PP)\mathbb{P}(\{PP\})+X(PF)\mathbb{P}(\{PF\})+X(FP)\mathbb{P}(\{FP\})+X(FF)\mathbb{P}(\{FF\})\\&=2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}=1.\end{aligned}$$
2. On considère Y la variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

y_i	-2	0	5	Total
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$	1

   On a : $E(Y)=$

Remarques :

— Intuitivement, l'espérance de la variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que prendra X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
Si X est le gain à un jeu, $E(X)$ est donc ce que l'on peut espérer gagner, en moyenne.

— L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.

Vocabulaire

— On dit que la variable aléatoire X est **centrée** lorsque $E(X)=0$.

— Lorsque la variable aléatoire G est le gain d'un joueur à un jeu d'argent, on dit que le jeu est **équilibré** si G est centrée ; le jeu avantage un des joueurs sinon.

Théorème (formule de transfert)
Soit une fonction φ. La variable aléatoire $\varphi(X)$ a pour espérance :

$$E(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\mathbb{P}_X(x_i)$$

Exemple : On lance un dé équilibré. Soit X le résultat obtenu, déterminons $E(X^2)$.
On a : $E(X^2)=\sum x_i^2\mathbb{P}_X(x_i)=\sum_{k=1}^{6}k^2\dfrac{1}{6}=\dfrac{1+4+9+16+25+36}{6}=\dfrac{91}{6}$.

Proposition
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a : $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Remarques :

1. En prenant $b=-E(X)$, la variable aléatoire $X-E(X)$ est centrée.
2. Cette proposition est une conséquence du théorème de transfert : c'est le cas particulier $\varphi(x)=ax+b$.
3. La formule de transfert s'adapte aux couples et aux n-uplets de variables aléatoires.

Proposition (propriétés de l'espérance)
Soit X et Y des variables aléatoires réelles ou complexes sur Ω.

— **Linéarité** : $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.

— **Inégalité triangulaire** : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Les deux dernières concernent uniquement les variables aléatoires réelles :

— **Positivité** : si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.

— **Croissance** : si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

Remarque : l'espérance est donc une application linéaire de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles (ou complexes) sur Ω et $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), c'est-à-dire une *forme linéaire.*

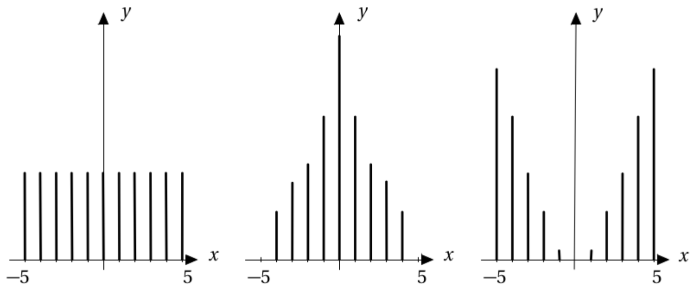
Proposition (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire réelle positive et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On a : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

3 Variance d'une variable aléatoire réelle : un indicateur de dispersion

Notations : X désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X.

Un exemple pour comprendre les limites de l'espérance et la nécessité de mesurer la dispersion : le tableau ci-dessous décrit les lois de probabilités de trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 :

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	Total
$\mathbb{P}(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	1
$\mathbb{P}(X_2 = x_i)$	0	$0,05$	$0,08$	$0,1$	$0,15$	$0,24$	$0,15$	$0,1$	$0,08$	$0,05$	0	1
$\mathbb{P}(X_3 = x_i)$	$0,2$	$0,15$	$0,09$	$0,05$	$0,01$	0	$0,01$	$0,05$	$0,09$	$0,15$	$0,2$	1



X_1, X_2 et X_3 prennent les mêmes valeurs, ont la même espérance (elles sont centrées) mais elles sont sensiblement différentes : la densité de probabilité de X_1 est répartie de façon uniforme, celle de X_2 est plus « concentrée » autour de 0, celle de X_3 est plus « dispersée » vers les valeurs extrêmes.

L'objet de la variance est de mesurer la dispersion de la densité autour de son espérance.

Définition
Soit X une variable aléatoire <u>réelle</u> sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

— La **variance** de X est le réel positif défini par $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.

— L'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

— On dit que X est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.

Exemples :

1. Calculons les variances des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 de l'exemple précédent.
   On rappelle que ces trois variables sont centrées, autrement dit leur espérance vaut 0.

   $$V(X_1) = E((X_1 - E(X_1))^2) = E(X_1^2) = (-5)^2\tfrac{1}{11} + (-4)^2\tfrac{1}{11} + \cdots + 5^2\tfrac{1}{11} = \tfrac{2\times(25+16+9+4+1)}{11} = 10$$

   $$V(X_2) = E((X_2 - E(X_2))^2) = E(X_2^2) = (-5)^2 \times 0 + (-4)^2 \times 0,05 + \cdots + 5^2 \times 0 = 4,14$$

   $$V(X_3) = E((X_3 - E(X_3))^2) = E(X_3^2) = (-5)^2 \times 0,2 + (-4)^2 \times 0,15 + \cdots + 5^2 \times 0,2 = 16,84$$

2. Calculons la variance de Y dont la loi de probabilité est :

y_i	-5	2	10	Total
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$0,7$	$0,2$	$0,1$	1

— Commençons par

— On peut alors calculer la variance de Y :

Remarques :

a) $V(X)$ est une somme de nombres positifs, donc c'est un nombre positif.

b) Si $V(X)=0$ alors tous les termes de la somme sont nuls. Cela implique que X prend une certaine valeur $x \in X(\Omega)$ avec une probabilité 1 et toutes les autres valeurs de X ont une probabilité nulle.

Proposition (forme développée de la variance)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On a $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Méthode (Pour calculer plus rapidement la variance)
on utilise la forme développée.

Exemple : reprenons le calcul de la variance de la variable aléatoire Y de l'exemple précédent.
On a déjà calculé $E(Y)=-2,1$.
On a $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=E(Y^2)-4,41=25\times 0,7+4\times 0,2+100\times 0,1-4,41=23,89$.

Proposition (Effet d'une dilatation et d'une translation sur la variance)
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$, a et b deux réels. On a $V(aX+b)=a^2V(x)$.

Conséquence importante :
Il suit que, si $V(X)\neq 0$ (ce qui est vrai sauf lorsque X ne prend qu'une valeur avec une probabilité 1) :

- $\dfrac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire réduite ;
- $\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant \alpha)\leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

4 Lois usuelles

Nous allons détailler pour quelques lois usuelles :

— les épreuves aléatoires dans lesquelles elles apparaissent ;

— les lois de probabilités ;

— les calculs de l'espérance et de la variance.

Remarque : ces exemples constituent une occasion de comprendre le sens pratique de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire.

- L'espérance est un indicateur de position, il correspond à la valeur moyenne que prendra la variable aléatoire sur un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire ;
- la variance mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire, autour de la valeur centrale : l'espérance.

4.1 Loi certaine

Exemple : la loi certaine est la loi d'une variable aléatoire pour laquelle une seule valeur peut se produire, par exemple le lancé d'un dé truqué pour lequel le résultat X est toujours 2. La loi de probabilité de X est alors résumée par :

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0	1	0	0	0	0	1

Les valeurs $1, 3, 4, 5$ et 6 de X ayant une probabilité nulle, on peut les omettre du tableau résumant la loi de probabilité de X qui devient alors simplement :

x_i	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1	1

.

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On dit que X suit une **loi certaine** lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$.

Proposition
Soit X un variable aléatoire qui suit une loi certaine sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. On a :

$$E(X) = \qquad\qquad ; \quad V(X) =$$

Remarque : cela a déjà été noté auparavant, une variable aléatoire ayant une variance nulle suit une loi certaine.

4.2 Loi uniforme

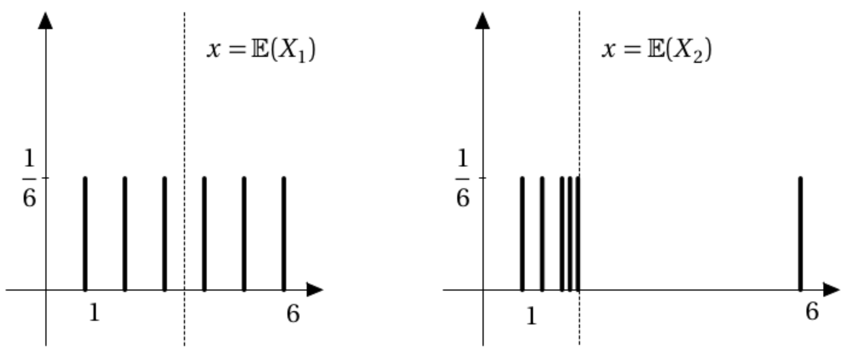
Exemple : la loi uniforme est celle d'une variable aléatoire dont les valeurs sont équiprobables ; par exemple le lancé d'un dé équilibré dont le résultat est X.
La loi de probabilité de X est alors :

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que $X(\Omega)$ a pour cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On dit que X suit une **loi uniforme** sur $X(\Omega)$ lorsque, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}_X(x_i) = \dfrac{1}{n}$.
Soit A un ensemble non vide et fini. Si X suit une loi uniforme sur A on note $X \sim \mathcal{U}(A)$.

Proposition
Avec les notations de la définition. L'espérance et la variance de X dépendent des valeurs prises par X.

- On a toujours $E(X) = \qquad\qquad$;
- dans le cas où $\{x_1, \dots, x_n\} = [\![1, n]\!]$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$;
- dans le cas où les valeurs prises par X forment une subdivision régulière de $[a, b]$ on a $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$.



4.3 Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

Vocabulaire :
Une expérience aléatoire est dite **binaire** (ou **de Bernoulli**) lorsqu'elle n'a que deux issues possibles. De façon analogue, une variable aléatoire binaire est une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs.

Définition

- On appelle **loi de Bernoulli** la loi d'une variable aléatoire binaire X qui prend pour valeurs : 0 et 1.
- Les événements $(X = 1)$ et $(X = 0)$ sont appelés **succès** et **échec**.
- En posant $\mathbb{P}(X = 1) = p$, la densité de probabilité de X est alors :

x_i	0	1	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1-p$	p	1

.
- Soit $p \in [0,1]$. On note $\mathcal{B}(p)$ la loi de Bernoulli de paramètre p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(p)$ on écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple : on joue à Pile ou Face et on considère que Pile correspond au succès, on le représente par $X = 1$; Face correspond à un échec, on le représente par $X = 0$.

- Si la pièce est équilibrée, on a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$, autrement dit $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
- Si la pièce donne deux fois plus souvent Pile que Face, on a $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{3}$: $X \sim \mathcal{B}(\frac{2}{3})$.

Proposition
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On a :

$$E(X) = \qquad\qquad ; \quad V(X) =$$

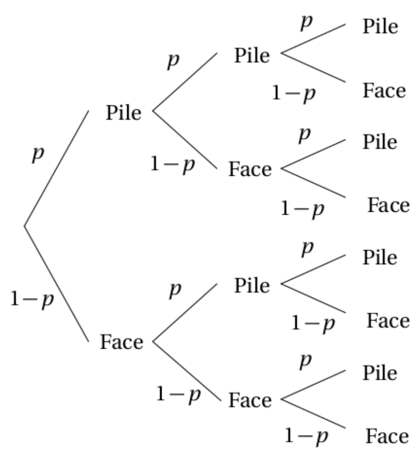
Démonstration
On applique les définitions :

- $E(X) =$
- $V(X) =$

4.4 Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$

Exemple : soit une pièce de monnaie qui tombe sur la Pile avec une probabilité $p \in [0,1]$. On la lance trois fois de suite ; on considère X le nombre de Pile obtenus.

- On peut représenter l'expérience aléatoire par un arbre probabiliste :



X prend ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$ et on détermine la loi de X par lecture de l'arbre. Par exemple, il y a trois chemins de l'arbre qui composent l'événement $(X = 2)$, chaque chemin a une probabilité $p^2(1-p)$ et donc $\mathbb{P}(X = 2) = 3p^2(1-p)$. Finalement :

x_i	0	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$					1

— Chaque lancer est une expérience de Bernoulli ; si l'on appelle succès le fait d'obtenir Pile et échec le fait d'obtenir Face, X est alors le nombre de succès obtenus en trois lancers.

— Les expériences de Bernoulli sont indépendantes : le résultat d'un des lancers n'influe pas sur les suivants.

— On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Remarque : si, pour chaque lancer, on code un succès par 1 et un échec par 0, alors une issue de l'épreuve est représentée par un triplet de $\{0, 1\}^3$ et X est la somme des composantes du triplet. Par exemple : $(1, 1, 0)$ signifie qu'on a eu Pile-Pile-Face et on a alors $X = 1 + 1 + 0 = 2$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

— La **loi binomiale de paramètres** n **et** p est la loi d'une variable qui compte le nombre de succès quand on répète de façon indépendante n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

— On note $\mathcal{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ on écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : si on appelle $X_1, \dots, X_n$ les n épreuves de Bernoulli, on a $X = X_1 + \cdots + X_n$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- X prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a : $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Démonstration

— X est le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, on a donc bien $X \in [\![0, n]\!]$.

— Si on représente l'expérience aléatoire par un arbre probabiliste, on aura 2^n chemins dans l'arbre. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, les chemins qui correspondent à l'événement $(X = k)$ comportent k succès et $n - k$ échec, la probabilité d'un tel chemin est donc $p^k (1 - p)^{n-k}$. Or, il y a autant de chemins qui correspondent à l'événement $(X = k)$ que de façons de placer k succès en n tentatives, soit $\binom{n}{k}$.
Finalement, on a bien : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Remarque : soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. La densité de $\mathcal{B}(n, p)$ se retrouve dans le développement de $(p + (1 - p))^n$ à l'aide de la formule du binôme :

$$(p + (1 - p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \ .$$

Cette observation permet de vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Méthode (Pour justifier qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale)

Des mots-clés doivent apparaître : « compter les succès », « répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ».

Mise en œuvre : exercices 8, 9 et 10.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a :

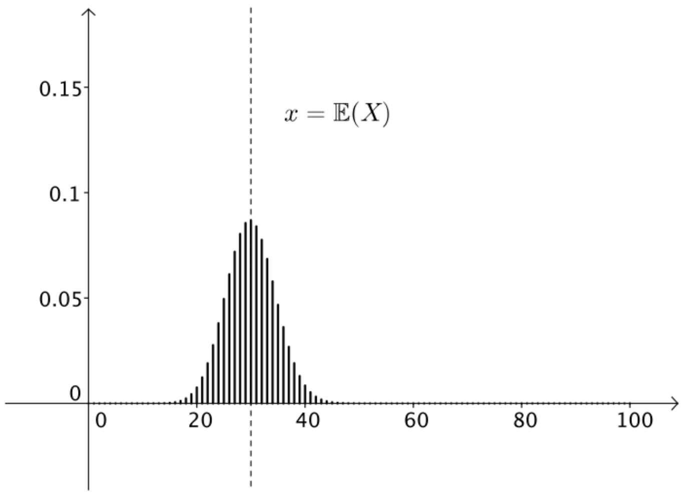
$$E(X) = np \qquad ; \quad V(X) = np(1 - p)$$

Démonstration

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ donc $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec les X_i qui sont des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathcal{B}(p)$. Par linéarité de l'espérance, on a : $E(X) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np$.

Pour la variance, c'est une conséquence de l'indépendance des X_i, on le détaillera dans la dernière partie du chapitre. ■

Pour conclure sur la loi binomiale, observons un exemple de densité :



L'allure évoque un Gaussienne, c'est-à-dire une densité de loi normale (ce lien n'est pas anodin, mais on n'en dira pas plus).

5 Conditionnement et indépendance pour les variables aléatoires

5.1 Couple de variable aléatoires

Motivation : sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ soit deux variables aléatoires X et Y dont on connait les lois de probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. Peut-on calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$?
La réponse est non car on a besoin de plus d'informations : il faut connaître le lien entre X et Y.

Définition
La **loi conjointe de** X **et** Y est la loi du couple (X, Y). On la note $\mathbb{P}_{X,Y}$.
On a donc : $\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))\ \ : (\star)$.

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ et Y les valeurs $y_1, \dots, y_m$, la loi conjointe de X et Y peut être présentée sous la forme du tableau :

${}_Y\backslash^X$	$\dots$	x_i	$\dots$
$\vdots$			
y_j		$\mathbb{P}_{X,Y}(x_i, y_j)$	
$\vdots$			

Remarques :

1. les notations introduites dans la définition sont conservées dans la suite du paragraphe.
2. La ligne $(\star)$ a été formulée pour des événements « élémentaires » $(X = x)$ et $(Y = y)$ mais on aurait pu prendre des événements « composés » $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ en écrivant :
$$\mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B))\ \ : (\star)$$
3. L'ensemble $\{(x_i, y_j)/(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; m]\!]\}$ est un système complet d'événements. Cela implique que la somme des probabilités indiquées dans le tableau doit être égale à 1 : $\displaystyle\sum_x \sum_y \mathbb{P}_{X,Y}(x; y) = 1$.
4. Dans la somme ci-dessus x et y parcourent les valeurs prises par X et Y, c'est-à-dire $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Exemple : soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est :

${}_Y\backslash^X$	1	2	3	4
0	0, 2	0, 1	0	0, 1
1	0, 1	0	0	0, 2
2	0	0, 1	0, 2	0

.

1. Que vaut $\mathbb{P}_{X,Y} = (1,1)$?
   Il suffit de lire le tableau : $\mathbb{P}_{X,Y}(1,1) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = 0,1$.
2. Que vaut $\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2)$?
   $\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{1;2\}^2) = \mathbb{P}((X \in \{1;2\}) \cap (Y \in \{1;2\}))$.
   On a donc :$\mathbb{P}_{X,Y}(\{1;2\}^2) = \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(1,2) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) = 0,2$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X = Y)$?
   On a $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}_{X,Y}(\{(1;1);(2;2)\}) = \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) = 0,2$.
4. Que vaut $\mathbb{P}_X(4)$?
   On a $\mathbb{P}_X(4) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}_{X,Y}(\{(4;0);(4;1);(4;2)\}) = \mathbb{P}_{X,Y}(4,0) + \mathbb{P}_{X,Y}(4,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(4,2) = 0,3$.
5. Que vaut $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1)$?
   Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, on revient aux définitions :
   $$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1))}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\mathbb{P}_{X,Y}(1,1)}{\mathbb{P}_X(1)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Proposition
Etant donné un couple de variables aléatoires (X,Y) dont on connait la loi conjointe $\mathbb{P}_{X,Y}$, on peut retrouver les **lois marginales** $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$.

On a : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}_{X,Y}(x,y)$ et $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_Y(y) = \sum_x \mathbb{P}_{X,Y}(x,y)$.

Remarque : le contraire est faux. En règle général on ne peut pas déduire la loi conjointe de X et Y. Sur l'exemple précédent on ne peut pas déduire $\mathbb{P}_{X,Y}$ de $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$.

5.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, lorsque pour tous événements $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

Exemple : on poursuit l'exemple précédent. X et Y sont-elles indépendantes ?
On a $\mathbb{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = 0$ et $\mathbb{P}_X(2) \times \mathbb{P}_Y(1) = 0,2 \times 0,3 \neq 0$: X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Proposition (définition alternative)
X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{X,Y}(x;y) = \mathbb{P}_X(x) \times \mathbb{P}_Y(y)$$

Exemple : soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$. Que vaut $\mathbb{P}(X = Y)$?
X et Y prennent leurs valeurs dans $[\![0;3]\!]$. On a donc $(X = Y) = \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3)\}$ et il suit que $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}_{X,Y}(0,0) + \mathbb{P}_{X,Y}(1,1) + \mathbb{P}_{X,Y}(2,2) + \mathbb{P}_{X,Y}(3,3)$.
X et Y sont indépendantes ; pour tout $i \in [\![0;3]\!]$ on a donc $\mathbb{P}_{X,Y}(i,i) = \mathbb{P}_X(i)\mathbb{P}_Y(i)$. Or, X et Y ont la même densité $\mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{3} \left(\binom{3}{i} \frac{1}{2^3} \right)^2 = \frac{1}{64}(1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

Proposition
Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, f et g deux fonctions. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque : pour que $f(X)$ et $g(Y)$ aient du sens, il faut que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$ et $Y(\Omega) \subset \mathcal{D}_g$.

Proposition (Espérance et indépendance)
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

5.3 Covariance de deux variables aléatoires

Définition
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle **covariance** de X et Y le réel :

$$\text{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))$$

Lorsque $\text{cov}(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont **décorrélées**.

Proposition (propriétés de la coviariance)
— **Symétrie** : $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$.
— **Expression développée** : $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
— **Lien avec l'indépendance** : Si X et Y sont indépendantes alors elles sont décorrélées.

Remarque : la réciproque est fausse. X et Y peuvent être décorrélées mais pas indépendantes.

Proposition (Variance d'une somme de variables aléatoires)

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$$

Proposition (Corollaire)
Si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque : on déduit de cette propriété le calcul de la variance de la loi binomiale.

5.4 Généralisation à n variables aléatoires

Définition
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires.

- La **loi conjointe** de $X_1, \ldots, X_n$ est la loi du $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$. On la note $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$.
- Les **lois marginales** $\mathbb{P}_{X_1}, \ldots, \mathbb{P}_{X_n}$ peuvent être déduites de la loi conjointe, mais on ne peut pas faire le contraire.
- On dit que les variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tous $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}_{X_1}(x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{X_n}(x_n)$$

Remarque : dans la définition de l'indépendance mutuelle, pour chaque i on a $x_i \in X_i(\Omega)$.

Exemple : soit une urne qui comporte des boules numérotées. Si on fait 5 tirages avec remise et que X_i désigne le numéro de la boule tirée au $i-$ème tirage, alors les variables X_i sont mutuellement indépendantes.
Par contre, si Y_i désigne la somme des numéros des boules obtenues lors des i premiers tirages alors les Y_i ne sont pas mutuellement indépendantes.

Proposition
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

La variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque : c'est la définition qu'on a donné pour la loi binomiale ! On a un peu un serpent qui se mord la queue... En fait, l'expression algébrique $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ est la définition de la loi binomiale et la propriété que l'on vient de voir explique dans quel type de situation on s'en sert.

Proposition (Lemme des coalitions)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.
$f(X_1, \ldots, X_r)$ et $g(X_{r+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque : pour alléger les notations de ce résultat intuitif (dont la démonstration n'est pas au programme) et qui servira l'an prochain, on a omis de préciser que $r \in [\![1; n-1]\!]$, $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$.