

Chapitre 21 : matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Matrices et applications linéaires

1.1 Des matrices aux applications linéaires

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Quelle doit être la taille d'une colonne X pour que AX existe ?
2. Quelle est alors la nature de AX ?
3. Que dire de l'application $X \mapsto AX$?

Définition

Soit n, p deux entiers naturels non nuls, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'application linéaire canoniquement associée à A est $\left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \right.$

Remarque : pour tout entier non nul r , il y a un isomorphisme évident entre \mathbb{K}^r et $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$, cela permet d'envisager l'application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme opérant entre \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n .

Exemples :

1. Quelle est l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$?

2. Que dire de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice nulle ?
3. Que dire de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice carrée ?
4. Que dire de l'endomorphisme associé à I_n ?

Remarque : à partir d'une matrice, on peut donc créer une application linéaire. Essayons de faire le chemin inverse.

1.2 Des applications linéaires aux matrices

On a vu dans le paragraphe précédent que le produit matriciel peut être interprété comme une application linéaire entre des colonnes.

Etant donnés deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F , on sait comment représenter leurs vecteurs comme des colonnes :

On a également vu, lors du chapitre 18, qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par

Essayons d'assembler les pièces du puzzle avec un exemple ; on va simplifier un peu les choses en prenant un endomorphisme

Exemple : soit $E = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / y'' = -y\}$.

- Une base de E est $\mathcal{B} =$ et les vecteurs de E sont de la forme $f =$
- Pour définir un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ il suffit de
- Posons donc :
- L'image du vecteur $f = x \cos + y \sin$ par u est
- Si l'on écrit les matrices colonnes des vecteurs, on a :
- Du point de vue des colonnes, u correspond donc au produit matriciel (à gauche) par :

ATTENTION : nous avons fait un **choix** qui a eu des conséquences importantes,

Exercice

Pour poursuivre l'exemple précédent, soit D la dérivation des éléments de E .

- a) Justifier que $D \in \mathcal{L}(E)$.
- b) Donner la matrice de D dans la base (\cos, \sin) .
- c) Donner la matrice de D dans la base $(3 \sin, 2 \cos - \sin)$.

Réponse

- a) La dérivation
- b) On a :

- c) On a :

1.3 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

Définition

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, qu'on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$.

Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i \in \llbracket 1;p \rrbracket}$ des bases de E et F respectivement. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

La **matrice de u relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$, est la matrice de taille $p \times n$ dont les colonnes sont les images des vecteurs de \mathcal{B}_E exprimés dans \mathcal{B}_F .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) =$$

Remarque : si $u \in \mathcal{L}(E)$, le plus souvent on considère une seule base \mathcal{B} . On note alors la matrice : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemples :

a) Donner la matrice de la dérivation dans $\mathbb{K}_3[X]$ relativement à la base canonique :

$$\text{Mat}_{can} \left(\frac{d}{dX} \right) =$$

b) On garde la même application, mais on change de bases :

$$\mathcal{B}_1 = (2, X + 1, X^2, X^3 - 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 =$$

—

—

—

On en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \left(\frac{d}{dX} \right) =$$

c) On conserve les notations précédentes. Donner la matrice de l'identité relativement aux bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 .

d) Toujours avec les mêmes notations, donner la matrice de l'identité relativement aux bases \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_1 .

e) Si l'on regarde la matrice de l'identité dans une même base, on obtient

Méthode (Pour trouver la matrice de u relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F)

1. On calcule $u(\vec{e}_1)$.
2. On exprime ce vecteur dans \mathcal{B}_F .
3. Le résultat obtenu, écrit sous-forme de colonne, est la première colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$.
4. On recommence pour \vec{e}_2 et, ainsi de suite, on construit les n colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$.

Mise en œuvre : exercices 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Remarque : « la matrice de u » sans préciser « relativement au couple de bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F » n'a pas de sens ! En effet, si on change les bases, on change la matrice. Cela étant :

- les matrices seront certes différentes, mais elles auront des caractéristiques communes puisqu'elles représentent la même application linéaire.
- Un travail important sera fait (notamment l'an prochain) pour construire des bases dans lesquelles la matrice de u sera *simple* (par exemple une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix}$).
- On verra, dans ce chapitre, la formulation matricielle du changement de base.

1.4 Calculer des images à l'aide d'une matrice

On conserve les notations précédentes : E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$. $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i \in [1, n]}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i \in [1, p]}$ sont des bases de E et F . $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dispose de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$: comment calculer l'image d'un vecteur $\vec{x} \in E$ par u ?

- Déjà, c'est facile si \vec{x} est un vecteur de \mathcal{B}_E . En effet :
- Sinon, on peut se ramener à \mathcal{B}_E :
- On a alors, par linéarité :
- On reconnaît :

Méthode (Pour calculer les images d'un vecteur $\vec{x} \in E$ en utilisant $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$)

1. On détermine la décomposition de \vec{x} dans \mathcal{B}_E .
2. Cela permet d'écrire la colonne $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$ qu'on note X .
3. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times X$ est la colonne de $u(\vec{x})$ dans \mathcal{B}_F (c'est-à-dire : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\vec{x}))$).

Mise en œuvre : exercices 2 et 5.

Exemple : soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Que vaut $u(X^2)$?

b) Que vaut $u(5X^2 + 3X + 2)$?

2 Correspondance entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

On conserve les notations précédentes : E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, on note $n = \dim E$ et $p = \dim F$. $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_i)_{i \in [1;n]}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{i \in [1;p]}$ sont des bases de E et F .

Proposition

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

i. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda u) =$

ii. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u + v) =$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la définition. ■

Théorème

L'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration

La proposition précédente garantit que l'application est linéaire (elle respecte les sommes et les multiplications par un scalaire, donc elle respecte les combinaisons linéaires).

Une application linéaire est parfaitement déterminée par l'image des vecteurs d'une base, donc u est parfaitement déterminée par $u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)$. Chacun de ces vecteurs de F est lui-même parfaitement déterminé par son expression en coordonnées dans \mathcal{B}_F . Finalement, il y a donc une correspondance bijective entre les applications linéaires et les matrices. ■

Remarques :

- a) Attention : il y a correspondance bijective **lorsque les bases sont fixées**. Si on change les bases, on change la correspondance (mais elle sera toujours bijective).
- b) On va adopter une notation propre au cours pour indiquer que l'on représente les vecteurs d'un espace E comme des colonnes de coordonnées dans une base $\mathcal{B} : E_{\mathcal{B}}$.

Proposition (Une conséquence importante)

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) =$$

Démonstration

Proposition

Soit G un troisième espaces vectoriel de dimension finie ; soit \mathcal{B}_G , une de ses bases.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) =$$

Démonstration



Proposition (Une conséquence importante)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est un isomorphisme si, et seulement si,

Démonstration

u est un isomorphisme si, et seulement si,

Remarques :

- Quelles que soient les bases choisies, les matrices qui représentent u sont inversibles.
- Le lien qu'on avait entrevu sur le vocabulaire « groupe linéaire » prend ici tout son sens.
- On ne l'a pas précisé mais, pour que u soit un isomorphisme il y a une condition nécessaire (mais pas suffisante) sur les dimensions :

3 Noyau, image et rang d'une matrice

Notations pour ce paragraphe :

- n et p désignent des entiers naturels non nuls,
- M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
- u_M est l'application linéaire canoniquement associée à M . On a donc $u_M \in$

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition

On appelle **noyau** de la matrice M et on note $\ker(M)$ le noyau de u_M . C'est un sous-espace de

Exemple : déterminer le noyau de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Remarque : les lignes de M donnent un système homogène d'équations linéaires de $\ker(M)$.

Méthode (Pour trouver le noyau d'une matrice M de taille $n \times p$)

- il faut résoudre le système linéaire homogène dont la matrice est M .
- On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes.
- On exprime les coordonnées principales en fonction des coordonnées secondaires pour faire apparaître un Vect.
- On vérifie que les vecteurs obtenus ont bien p coordonnées.

Mise en œuvre : exercices 1 et 8.

Remarque : il est facile de vérifier qu'on a bien obtenu des vecteurs du noyau, il suffit de faire le produit matriciel.

Définition

On appelle **image** de la matrice M et on note $\text{Im}(M)$ l'image de u_M . C'est un sous-espace de

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Déterminer l'image de M .

Proposition (utile en pratique)

Faire des opérations élémentaires sur les colonnes de M ne change pas son image.

Démonstration

Notons C_1, \dots, C_p les colonnes de M et soit M' une matrice obtenue en ayant fait des opérations élémentaires sur les colonnes de M . Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, C_i représente $u_M(\vec{e}_i)$ et donc faire des opérations élémentaires sur les colonnes de M revient à faire des combinaisons linéaires sur les vecteurs de $\text{Im}(M)$. Or, $\text{Im}(M)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n et donc c'est un ensemble stable par combinaisons linéaires, il suit que $\text{Im}(M') \subset \text{Im}(M)$.

Les opérations élémentaires étant réversibles, on a aussi $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M')$. Finalement, $\text{Im}(M) = \text{Im}(M')$. ■

Méthode (Pour trouver une base de l'image d'une matrice M)

1. l'image de la matrice M est le sous-espace de \mathbb{K}^n généré par les colonnes de M .
Autrement dit : la famille des colonnes de M est génératrice de $\text{Im}(M)$.
2. Pour extraire une base, on applique l'algorithme de Gauss à M sur les colonnes.

Mise en œuvre : exercices 1, 2, 3 et 8.

Définition

On appelle **rang** de la matrice M et on note $\text{rg}(M)$ le rang de u_M .

Proposition

On note C_1, \dots, C_p les colonnes de M .

Le rang de M est également le rang de la famille (C_1, \dots, C_p) .

Démonstration

On revient aux définitions : le rang de M est le rang de u_M c'est-à-dire la dimension de $\text{Im}(u_M)$.

Or, $(C_1, \dots, C_p) = (u_M(\vec{e}_1), \dots, u_M(\vec{e}_p))$ avec $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ la base canonique de \mathbb{K}^p . ■

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Le rang de M est

Remarque : toujours sur l'exemple précédent, pouvait-on trouver le rang de M avant d'avoir déterminé $\text{Im}(M)$?

Théorème (du rang pour les matrices)

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème du rang à u_M . ■

Proposition (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit M une matrice carrée de taille n . On a :

$$\begin{aligned} M \text{ est inversible} &\iff u_M \\ &\iff \text{Ker}(M) = \\ &\iff \text{rg}(M) = \\ &\iff \text{Les colonnes de } M \text{ engendrent} \end{aligned}$$

Démonstration

C'est une reformulation de ce qui a été vu sur les applications linéaires. u_M est un endomorphisme de \mathbb{K}^n .

$$u_M \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}^n \iff u_M \text{ est injectif} \iff u_M \text{ est surjectif}$$

Remarque : grâce à ce qui a été vu dans ce paragraphe, on peut proposer une démonstration efficace pour un résultat démontré plus difficilement dans le chapitre 9 :

Proposition

Soit M une matrice carrée. Si M est inversible à gauche ou à droite, alors M est inversible.

Démonstration

L'inversibilité de M , à gauche ou à droite, correspond à l'existence d'une application réciproque pour u_M . On a vu qu'alors cette application réciproque est linéaire et que u_M est un isomorphisme. ■

3.2 Propriétés du rang

Proposition

Multiplier une matrice M par une matrice inversible ne change pas le rang de M .

Démonstration

Multiplier M (à gauche ou à droite) revient, du point de vue des applications linéaires, à

Or, on a vu que ■

Remarque : on connaît une famille de matrices inversibles,

Proposition (Conséquence pratique)

Le rang de M est conservé lorsqu'on fait des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

Démonstration

Méthode (Pour trouver le rang d'une matrice M)

On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes de M , sur les colonnes de M , on peut passer de l'un à l'autre si ça arrange.

Mise en œuvre : exercices 1, 3 et 8.

Exemples :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

Proposition (Le rang est invariant par transposition)

$$\text{rg}(M^T) = \text{rg}(M)$$

Idée de la démonstration [H.-P.] : le rang ne change pas lorsqu'on fait des opérations sur les lignes ou sur les colonnes. Or, les colonnes de M sont les lignes de M^T .

4 Changements de bases

4.1 Un exemple pour comprendre l'intérêt de trouver une « bonne » base

On considère l'endomorphisme u de \mathbb{K}^2 défini par $(x, y) \mapsto (3x + 6y, -x - 2y)$.

1. Déterminer $\text{Mat}_{\text{can}}(u)$.
2. Calculer $\text{Mat}_{\text{can}}(u)^2$. Qu'en déduire sur u ?
3. Déterminer des vecteurs \vec{a} et \vec{b} tels que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(\vec{a})$ et $\text{Im}(u) = \text{Vect}(\vec{b})$.
4. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ est une base de \mathbb{K}^2 .
5. Que vaut $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$?
6. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Bilan :

4.2 Matrices de passage

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{B} et \mathcal{B}' en sont deux bases.

- La **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** est la matrice de Id_E relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) .$$

- En pratique, les colonnes de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont les vecteurs de \mathcal{B}' exprimés dans \mathcal{B} .

Exemple : On prend $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, 2X - 1, X^2 - 3X)$.

1. Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

2. Déterminer $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

3. Calculer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

4. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Proposition

On garde les notations de la définition.

Soit $\vec{x} \in E$, on note X et X' les matrices colonnes qui représentent \vec{x} dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' . On a $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$.

Démonstration

■

Proposition (conséquence)

On garde les notations de la définition.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est

Proposition

Toute matrice carrée inversible de taille n peut être envisagée comme une matrice de passage entre de deux bases de E .

Démonstration

Quitte à composer par des isomorphismes, on peut considérer que $E = \mathbb{K}^n$.

Soit M une matrice inversible de taille n .

En regardant les colonnes de M comme des vecteurs de \mathbb{K}^n , on a une famille libre de n vecteurs, c'est-à-dire à une base de \mathbb{K}^n . M est alors la matrice de passage de cette base à la base canonique de \mathbb{K}^n . ■

4.3 Plusieurs matrices pour une même application linéaire

Soit E, F deux espaces de dimensions n et p ; $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On prend deux bases pour chaque espace : $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F$ et \mathcal{B}'_F

Proposition

En conservant les notations précédentes :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) =$$

4.4 Matrices semblables

Définition

Soit M, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M et N sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P^{-1}NP$.

Proposition

On conserve les notations de la définition. M et N sont semblables si, et seulement si, ce sont les matrices d'un même endomorphisme de \mathbb{K}^n relativement à deux bases différentes.

Démonstration

Dans la définition, P est inversible, c'est donc une matrice de passage entre deux bases. ■

Proposition

Deux matrices semblables ont même rang **et** même trace.

Démonstration

- Pour le rang : deux matrices M et N sont semblables si, et seulement si,
- Pour la trace : démonstration sur la fiche de TD.

Attention :

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont mêmes rangs et même traces mais ne sont pas semblables. En effet,

5 Retour sur les systèmes linéaires

Notations pour ce paragraphe :

- n et p désignent des entiers naturels non nuls,
- \mathcal{S} est un système linéaire à n équations et p inconnues.
- La formulation matricielle de \mathcal{S} est $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne du second membre et X la colonne de taille p des inconnues.
- Le système homogène \mathcal{S}_h correspond à l'équation matricielle $AX = 0_n$

Proposition

Le système \mathcal{S} est compatible si, et seulement si, $B \in \text{Im}(A)$.

Proposition

L'ensemble des solutions du système \mathcal{S}_h est

Démonstration

Les deux propositions précédentes sont des reformulations avec le vocabulaire introduit dans ce chapitre. ■

Proposition

L'ensemble des solutions du système \mathcal{S}_h est un sous-espace de \mathbb{K}^p de dimension

Démonstration

On applique ■

Proposition

Si A est carrée et inversible alors

Remarque : dans ce dernier cas, on dit que le système est de Cramer.

En utilisant ce qui vient d'être vu ainsi que la structure des équations linéaires (voir le chapitre 18) on a :

Méthode (Pour donner le nombre de solution d'un système carré $AX = Y$ sans le résoudre)

- Si le système est de rang n , il est de Cramer et a une unique solution, quel que soit Y .
- Si le rang est $< n$, on a deux possibilités, selon Y .
 - Si $Y \in \text{Im}(A)$ alors le système a une infinité de solutions.
 - Si $Y \notin \text{Im}(A)$ alors le système n'est pas compatible

Mise en œuvre : exemples ci-dessous, tous les systèmes linéaires vus cette année peuvent être envisagés de ce point de vue.

Exemple : sans les résoudre, déterminer le nombre de solutions des systèmes

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \pi x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = 5 \\ 7x + 2y + z = 8 \end{cases} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{S}} : \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 3x - 2y - 7z = 5 \\ 5x - z = 8 \end{cases}$$