Chapitre 23 : déterminants

Introduction

Cadre général

Soit n un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que des problèmes *a priori* différents étaient équivalents :
- décider si une famille de n vecteurs de E est libre ;
- décider si une famille de n vecteurs de E est génératrice de E ;
- décider si une famille de n vecteurs de E est une base de E ;
- décider si un endomorphisme de E est un automorphisme ;
- décider si une matrice est inversible.

Toutes ces situations peuvent être traitées en se ramenant à un calcul :

Le déterminant est une autre approche, calculatoire, plus rapide à mettre en œuvre (mais qui donne moins d'information) pour répondre à ces questions. Suivant le contexte, on aura le déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.

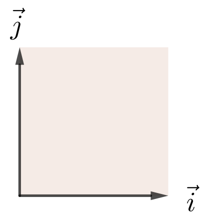
D'ores et déjà, la conclusion de ce chapitre sera : **le déterminant est l'outil privilégié de l'algèbre linéaire**.

Mesure de l'aire orientée dans le plan

La construction rigoureuse de l'aire orientée n'est pas un objectif du programme, nous ne le ferons donc pas. L'idée est de construire l'intuition qui va mener au déterminant.

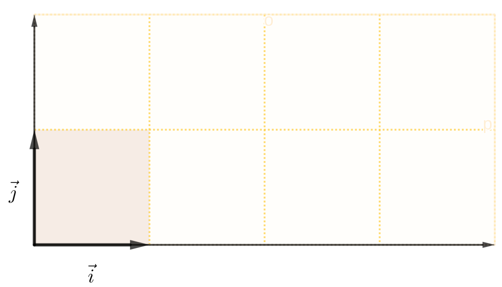
Dans le plan $\mathscr{P}$, on fixe une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (que je vais représenter orthonormée sur les figures mais c'est juste pour ne pas déroger à vos habitudes).

Le parallélogramme construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définit une **unité d'aire orientée du plan**, relativement à la base $\mathscr{B}$.



Il faut envisager cette unité comme une « brique élémentaire » qui permet de mesurer toute brique constituée par un couple de vecteurs du plan : pour un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs du plan, on note $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$ l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $(\vec{u}, \vec{v})$.

On parle de surface orientée (ou encore algébrique) car c'est une quantité signée selon l'ordre des vecteurs par rapport à ceux de la base :



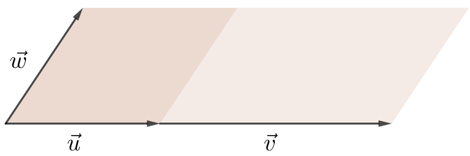
$\mathscr{A}(4\vec{i}, 2\vec{j}) =$

$\mathscr{A}(2\vec{j}, 4\vec{i}) =$

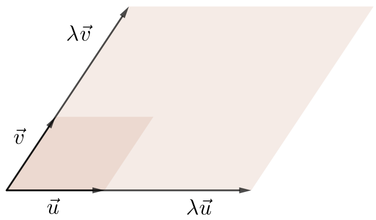
(Pour dire les choses de façon plus précise : le signe indique si la famille de vecteurs qui permet de construire l'aire ou le volume considéré est une base directe ou non).

Proposition (Propriétés de la surface orientée, relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$)
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan. λ désigne un réel.

- $\mathscr{A}(\vec{v}, \vec{u}) = -\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$
- $\mathscr{A}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) =$ $\qquad$ $\mathscr{A}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) =$



- $\mathscr{A}(\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v}) =$



- $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff$

Le déterminant, que l'on va présenter dans la suite, prolonge ces notions géométriques en ce sens qu'il respecte les mêmes règles en dimension supérieure.

Notations pour la suite du chapitre
- n est un entier naturel non nul.
- E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n.
- B désigne une base de E. Lorsqu'on aura besoin des vecteurs de B, on les notera $e_1, \ldots, e_n$.
- $(x_1; \ldots; x_n)$ est une famille de n vecteurs de E.

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition
Il existe une unique application $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ qui soit :

- linéaire sur chaque variable :
- alternée :
- et vérifiant $\det_B(B) = 1$.

Le scalaire $\det_B(x_1; \ldots; x_n)$ s'appelle le **déterminant dans la base B de la famille** $(x_1; \ldots; x_n)$.

Remarque : cette définition annonce l'existence et l'unicité de $\det_B$. La preuve n'est pas au programme.

Proposition
On conserve les notations de la définition.

$\det_B$ est antisymétrique :

Remarque : autrement dit, permuter deux vecteurs multiplie le déterminant par -1.
Si on permute plus de deux vecteurs, il faut se ramener à une succession de permutations de deux vecteurs pour voir combien de fois le signe a été modifié.

Démonstration
Mettons qu'on permute x_1 et x_2 :

■

Remarque : toute application linéaire sur chaque composante et alternée est antisymétrique, ce n'est pas propre au déterminant.

2 Cas particuliers des dimensions 2 et 3

Proposition (Cas $n = 2$)
Soit E un espace de dimension 2, B une base de E et (x, y) une famille de deux vecteurs de E.
Si $(x_1; x_2)$ et $(y_1; y_2)$ sont les coordonnées de x et y dans la base B, on a :

$$\det_B(x; y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Démonstration
Notons $B = (e_1; e_2)$. On a :

$$\det_B(x; y) = \det_B(x_1 e_1 + x_2 e_2 \ ; \ y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

$$=$$

$$=$$

Remarque : anticipons un peu la suite du chapitre en allant vers les matrices.
$\det_B(x; y) = \det_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ sera également noté $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ et on retrouve la définition du déterminant qu'on avait vu pour les matrices 2×2 dans le chapitre sur les matrices.

Proposition (Cas $n = 3$)
Soit E un espace de dimension 3, B une base de E et $(x; y; z)$ une famille de trois vecteurs de E.
Si $(x_1; x_2; x_3)$, $(y_1; y_2; y_3)$ sont les coordonnées de x, y et z dans la base B, on a :

$$\det_B(x; y; z) =$$

Démonstration
Notons $B = (e_1; e_2; e_3)$. On a :

$$\det_B(x; y; z) = \det_B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \ ; \ y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \ ; \ z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Remarque : en adaptant les notations vues pour la dimension 2 on a la *Règle de Sarrus* qui est un moyen mnémotechnique pour retenir la valeur du déterminant.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

Méthode (Pour calculer un déterminant en dimension 2 ou 3)

1. On exprime les vecteurs dans la base de référence, on obtient des colonnes ;
2. On applique les formules : on est conduit à calculer une expression polynômiale en les coordonnées des vecteurs.

Proposition (Aire et volumes orientés dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leurs bases canoniques)

- Dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant dans la base canonique d'une famille $(\vec{u};\vec{v})$ est la mesure de l'aire orientée du parallélogramme formé sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant dans la base canonique d'une famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est la mesure du volume orienté du parallépipède formé sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démonstration

L'aire orientée et le volume orienté dans les bases canoniques vérifient les propriétés de la définition du déterminant : linéarité par rapport à chaque vecteur, alternance, l'aire orientée (le volume orienté) de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (de $\mathbb{R}^3$) vaut 1. L'unicité du déterminant permet de conclure. ■

3 Propriétés du déterminant

Proposition (Rôle de la condition $\det_B(B) = 1$)

Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, alors f est un multiple de $\det_B$.

Démonstration

Montrons que $f = f(B) \times \det_B$.

— Si $f(B) \neq 0$ alors l'application $\frac{1}{f(B)}f$ est linéaire sur chaque composante, alternée, vaut 1 en B, c'est donc $\det_B$.

— Si $f(B) = 0$, montrons que f est l'application nulle. Soit $(x_1;\dots;x_n) \in E^n$.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le vecteur x_i se décompose dans la base B : $x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} e_j$.

On a alors : $f(x_1;\dots;x_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j} e_j \ ; \ \dots \ ; \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} e_j\right)$.

En utilisant la linéarité de f sur chaque composante, le fait que f soit alternée et donc antisymétrique, on obtient que $f(x_1;\dots;x_n) = \text{scalaire} \times f(B) = 0$ et donc f est bien nulle.

Finalement, f est donc bien un multiple de $\det_B$. ■

Proposition (Rôle de la base dans le calcul du déterminant)

Soit B' une autre base de E. On a :

$$\det_{B'}(x_1 \ ;\dots;\ x_n) = \det_{B'}(B) \times \det_B(x_1 \ ;\dots;\ x_n).$$

Démonstration

$\det_{B'}$ est une application linéaire par rapport à chaque composante et alternée, c'est donc un multiple de $\det_B$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{B'} = \lambda \times \det_B$. En évaluant en B on obtient $\det_{B'}(B) = \lambda$. ■

Proposition (Corollaires)

On garde les notations de la proposition précédente. On a :

i. $\det_B(B') = \dfrac{1}{\det_{B'}(B)}$

ii. le déterminant d'une base relativement à une autre base est non nul.

Démonstration
Pour i., dans la démonstration précédente, on évalue en B' plutôt qu'en B.
$\det_B(B')$ et $\det_{B'}(B)$ sont des scalaires inverses l'un de l'autre, ils sont donc non nuls, ce qui garantit ii. ■

Proposition (Le déterminant permet de savoir si une famille est une base)
La famille $(x_1;\dots;x_n)$ est une base si, et seulement si, $\det_B(x_1;\dots;x_n)\neq 0$

Démonstration
le corollaire précédent nous garantit que si $(x_1;\dots;x_n)$ est une base alors $\det_B(x_1;\dots;x_n)\neq 0$.

Montrons à présent que si $(x_1;\dots;x_n)$ n'est pas une base alors $\det_B(x_1;\dots;x_n)=0$.
Si $(x_1;\dots;x_n)$ n'est pas une base, alors c'est une famille liée et un de ses vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Quitte à permuter deux vecteurs de $(x_1;\dots;x_n)$ (ce qui ne changerait que le signe du déterminant), supposons que x_1 soit combinaison linéaire de $x_2,\dots,x_n$: $x_1=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i x_i$. On a alors :

$$\det_B(x_1;\dots;x_n)=\det_B\left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i x_i\ ;x_2;\dots;x_n\right)=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\det_B(x_i;x_2;\dots;x_n)=0$$

Méthode (Pour savoir si une famille de n vecteurs est une base)
On exprime ces vecteurs dans une base de l'espace (peu importe laquelle) et on calcule le déterminant de la famille de vecteurs.
La famille est une base si, et seulement si, le déterminant est non nul.

Mise en œuvre : exemple ci-dessous et exercice 2.

Exemple : La famille $F=(X^2+X+1\ ;\ X^2+3X-1\ ;\ X^2-3X+5)$ est-elle une base de $\mathbb{K}_2[X]$?

Remarque : On pouvait également déterminer le rang de la matrice pour obtenir le résultat. On aurait alors trouvé une information supplémentaire :

De façon générale, la nullité du déterminant correspond à ce que le rang ne soit pas maximal, le calcul du rang donne donc plus d'informations mais c'est d'une comlpexité (au sens du calcul) plus importante.

4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition
Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $B=(e_1;\dots;e_n)$ une base de E.

Le scalaire $\det_B(f(e_1);\dots;f(e_n))$ ne dépend pas du choix de la base B, on l'appelle déterminant de l'endomorphisme f et on le note $\det(f)$.

Démonstration

La définition qu'on a donné annonce que le choix de la base n'importe pas, démontrons-le.
Soit $B = (e_1; \dots; e_n)$ et $B' = (e'_1; \dots; e'_n)$ deux bases de E, montrons que

$$\det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) = \det_{B'}(f(e'_1); \dots; f(e'_n))$$

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1; \dots; x_n) & \longmapsto & \det_B(f(x_1); \dots; f(x_n)) \end{array}\right.$ est linéaire sur chaque composante (car f est linéaire et que $\det_B$ l'est sur chaque composante) et alternée (car $\det_B$ l'est).
C'est donc un multiple de $\det_B$: il existe un scalaire λ tel que $\det_B(f(x_1); \dots; f(x_n)) = \lambda \det_B(x_1; \dots; x_n)$.
En évaluant en $(x_1; \dots; x_n) = (e_1; \dots; e_n) = B$ on obtient $\det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) = \lambda$ et :

$$\forall (x_1; \dots; x_n) \in E^n, \quad \det_B(f(x_1); \dots; f(x_n)) = \det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) \det_B(x_1; \dots; x_n)$$

On sait aussi que $\det_B = \det_B(B') \det_{B'}$: ($\spadesuit$). En évaluant en B' on obtient :

$$\begin{aligned} \det_B(f(e'_1); \dots; f(e'_n)) &= \det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) \det_B(B') \det_{B'}(e'_1; \dots; e'_n) \\ &= \det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) \det_B(B') \ : (\star) \end{aligned}$$

En évaluant ($\spadesuit$) en $(x_1; \dots; x_n) = (f(e'_1); \dots; f(e'_n))$ on a :

$$\det_B(f(e'_1); \dots; f(e'_n)) = \det_B(B') \det_{B'}(f(e'_1); \dots; f(e'_n)) \ : (\star\star)$$

En utilisant $(\star)$ et $(\star\star)$ on a : $\det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) \det_B(B') = \det_B(B') \det_{B'}(f(e'_1); \dots; f(e'_n))$.
Il suit, en divisant par $\det_B(B')$ qui est non nul : $\det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) = \det_{B'}(f(e'_1); \dots; f(e'_n))$. ■

Remarque : on a $\det(\mathrm{Id}_E) =$

Proposition (caractérisation des automorphismes)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un automorphisme si, et seulement si,

Démonstration

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $B = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E. On a :

$$\begin{aligned} f \text{ est un automorphisme} &\iff (f(e_1); \dots; f(e_n)) \text{ est une base de } E \\ &\iff \det_B(f(e_1); \dots; f(e_n)) \neq 0 \\ &\iff \det(f) \neq 0 \end{aligned}$$

Méthode (Pour savoir si un endomorphisme f est un automorphisme de E)

1. On choisit une base $B = (e_1; \dots; e_n)$ de E ;
2. on calcule $\det(f)$, c'est-à-dire $\det_B(f(e_1); \dots; f(e_n))$;
3. f est un automorphisme si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.

Mise en œuvre : exemple ci-dessous et exercice 3.

Exemple : dans $\mathbb{K}_2[X]$, l'endomorphisme $f(P) = XP' + P$ est-il un automorphisme ?

Remarque : on a défini le déterminant d'un endomorphisme, pas d'une application linéaire entre deux espaces différents. À ce stade du cours, on ne peut donc pas se servir du déterminant pour décider si une application linéaire entre deux espaces vectoriels différents de même dimension est un isomorphisme ou non.

Proposition (déterminant et composition d'endormorphisme)
Soit $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$. On a :
$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$$

Remarque : la preuve figure dans la fiche de TD.

5 Déterminant d'une matrice carrée

Notations complémentaires :

- A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- les coefficients de A sont notés $a_{i,j}$ (avec $1 \leq i, j \leq n$) ;
- $C_1, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de A.

Définition
On appelle **déterminant de** A le déterminant de $(C_1; \ldots; C_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On le note $\det(A)$, $|A|$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Remarques :

1. Il est naturel de faire la confusion entre la matrice A et la liste de ses colonnes $(C_1; \ldots; C_n)$.
2. $\det(I_n) =$
3. **Attention :** le déterminant n'est défini que pour les matrices carrées.

Proposition (définition équivalente)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(A)$ est le déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Proposition (Reformulation dans le contexte matriciel)
L'application $A \mapsto \det(A)$ est linéaire par rapport aux colonnes de A et alternée pour les colonnes de A.

Remarques :

a) on dira que $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est n-linéaire.

b) **Attention :** det n'est pas une application linéaire.
En général, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ et $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$ (avec $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Proposition
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\det(\lambda A) =$

Démonstration
On a : $\det(\lambda A) =$ ■

Proposition (Déterminant d'un produit)
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\det(A \times B) =$

Démonstration
Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B. AB est la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique et on a $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$ ce qui donne $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$. ■

Proposition (Déterminant et inversibilité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

i. A est inversible si, et seulement si,

ii. Si A est inversible alors

Démonstration
A est inversible si, et seulement si,

Proposition (Déterminant de la transposée)
On a $\det(A^T) = \det(A)$.

Remarque : la preuve de ce résultat est hors-programme.

Méthode (Pour savoir si une matrice carrée A est inversible)
On a plusieurs stratégies :

— (NEW) : on calcule $\det(A)$. A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

— On peut calculer le rang de A mais c'est souvent plus difficile que le déterminant.

A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) =$

— Certaines caractéristiques de A peuvent indiquer directement que A n'est pas inversible : si A a deux colonnes (ou deux lignes) identiques, si une colonne (ou une ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (lignes) de A.

Mise en œuvre : exemple ci-dessous et exercice 4.

Exemple : décider l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode (Pour décider si une application linéaire entre deux espaces est un isomorphisme)
Soit E et F deux espaces vectoriels différents de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

— Si $\dim(E) \neq \dim(F)$ alors

— Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors u est un isomorphisme si, et seulement si, une matrice de u (peu importe laquelle) a un déterminant non nul.

Mise en œuvre : exercice 5.

Remarque : on conserve les notations de la méthode. **Attention** : le déterminant de u n'existe pas !
En effet, u n'est pas un endomorphisme puisque $E \neq F$. Cela étant, u est inversible si, et seulement si, une matrice qui représente u (peu importe laquelle) est inversible, ce que l'on peut décider à l'aide du déterminant de cette matrice.

Proposition
Deux matrices semblables

Démonstration

Méthode (Pour montrer que deux matrices M et N ne sont pas semblables)

— Si M et N sont semblables alors elles ont mêmes traces, rangs et déterminant.

— On calcule donc ces nombres pour M et N, s'ils diffèrent alors M et N ne sont pas semblables.

— Si $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$ et $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$ et $\det(M) = \det(N)$, on ne peut pas conclure.

Pas d'exercices d'application directe cette année : décider si deux matrices sont semblables ou pas est un objectif de 2è année, la méthode permet dans certains cas de répondre négativement rapidement.

Exemple : parmi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y a-t-il des matrices semblables ?

6 Calcul du déterminant

On a vu plusieurs façons d'envisager le déterminant : déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base, déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carrée.
Dans la suite, on va se placer dans le contexte matriciel (auquel on peut systématiquement se ramener en écrivant les vecteurs comme des colonnes).

Notations :
A désignera une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ses colonnes seront notées $C_1, \dots, C_n$, λ désignera un scalaire.

Proposition (Propriétés calculatoires du déterminant)

i. Le déterminant est alterné sur les colonnes : si deux colonnes de A sont identiques alors $\det(A) = 0$.

ii. Si une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$.

iii. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

iv. $\det(I_n) = 1$.

Démonstration

i. iii. et iv. ont déjà été vues.

Pour ii., c'est une conséquence de la multilinéarité sur les colonnes du déterminant. Supposons que la première colonne soit nulle : $C_1 = 0$. On a alors $2C_1 = C_1$ et :

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \det(2C_1, C_2, \dots, C_n) = 2\det(C_1, C_2, \dots, C_n) = 2\det(A)$$

On en déduit $\det(A) = 0$.

Proposition (Effet des opérations élémentaires sur le déteminant)

- **Dilatation d'une colonne** : $\det(\dots, \lambda C_i, \dots) =$
- **Permutation de deux colonnes** : $\det(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots) = -\det(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots)$
- **Transvection sur les colonnes** : pour $j \neq i$, $\det(\dots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \dots) =$
- **Opérations élémentaires sur les lignes** : les mêmes règles s'appliquent que sur les colonnes.

Démonstration
Le déterminant est n-linéaire donc $\det(\dots, \lambda C_i, \dots) = \lambda \det(\dots, C_i, \dots)$

Le déterminant est alterné et donc antisymétrique sur les colonnes donc permuter deux colonnes change le signe du déterminant.

Le déterminant est n-linéaire et alterné sur les colonnes on a donc :
$\det(\dots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \dots) =$

Faire une opérations élémentaires sur les lignes de A c'est faire une opération élémentaire sur les colonnes de A^T. Le déterminant est invariant par transposition, donc les mêmes règles s'appliquent pour les opérations sur les lignes et sur les colonnes.

Proposition (Déterminant d'une matrice triangulaire)
Si A est triangulaire, alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de A.

Démonstration
Procédons pour une matrice triangulaire supérieure $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et alors :

— Soit $a_{1,1} = 0$ et alors A a une colonne nulle, donc $\det(A) = 0$ est égal au produit $\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

— Sinon, on a : $\det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

On poursuit l'algorithme de Gauss sur les colonnes : $\det(A) = a_{1,1} \dots a_{n,n} \det(I_n) = a_{1,1} \dots a_{n,n}$.
Si un des $a_{i,i}$ est nul, on arrête l'algorithme car le déterminant est nul (du fait d'une colonne de 0) et le résultat est vrai.

Le déterminant étant invariant par transposition, ce résultat est également valable pour les matrices triangulaires inférieures. ■

Méthode (Pour calculer un déterminant)
1. On fait des opérations sur les colonnes et sur les lignes pour aboutir à une matrice triangulaire, en respectant les règles suivantes :
   — Permuter deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1.
   — Dilater une ligne ou une colonne d'un rapport $\lambda \neq 0$ multiplie le déterminant par $\dfrac{1}{\lambda}$.
   — Ajouter à une ligne (ou une colonne) un multiple d'une autre ligne (ou colonne) ne change pas le déterminant.
2. Lorsque la matrice est triangulaire, son déterminant est le produit des termes diagonaux.

Mise en œuvre : exemples ci-dessous et exercices 1, 6 et 7.

Exemples :

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

b) Soit trois complexes a, b, c.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$$

Définition
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \geq 2$).
Un **mineur de** A est le déterminant d'une matrice obtenue en supprimant une ligne et une colonne de A.
Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le mineur obtenu en barrant la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne de A.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ on a $\Delta_{3,2} =$ et $\Delta_{1,1} =$

Remarques :

a) Un mineur d'une matrice de taille n est un déterminant de taille $(n-1) \times (n-1)$.

b) $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a n^2 mineurs.

Proposition (Développement par rapport à une ligne ou à une colonne)
On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On peut calculer le déterminant de M en :

- « développant » la $i-$ème ligne $\det(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}$.
- « développant » la $j-$ème colonne $\det(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}$.

Exemple : En développant par rapport à la première ligne, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$

Mais, ce qui serait plus judicieux c'est de

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

Remarques :

a) Ce résultat est admis (conformément au programme).

b) La formule vue pour les déterminants 3×3 correspond au développement selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

Méthode (Pour calculer un déterminant en pratique)
Par opérations, on crée une ligne (ou une colonne) avec un seul coefficient non nul et on développe selon cette ligne (ou cette colonne).

Mise en œuvre : exemple ci-dessous et exercices 1, 6 et 7.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Ultime remarque : le déterminant d'une matrice est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice.