

Chapitre 24 : fonctions de deux variables

1 Représentations graphiques et généralités

Définition

Une **fonction de deux variables** est une application f définie sur une partie de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} .

Lorsque la fonction f est définie par une expression $f(x; y)$, son **domaine de définition** est la plus grande partie de \mathbb{R}^2 pour laquelle l'expression a du sens.

Exemples : $f(x; y) = 3x + y$ est définie sur \mathbb{R}^2 , $g(x; y) = \frac{x}{y}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Comment représenter une telle fonction ? Commençons par bien comprendre ce que l'on fait naturellement avec une fonction d'une variable réelle f , définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

La *courbe représentative de f* est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x; f(x))$. On travaille avec des coordonnées, donc dans un repère du plan, ce qui permet d'identifier les points à des couples de coordonnées. La courbe représentative de f est alors $\mathcal{C}_f = \{(x; y) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{R} / y = f(x)\}$.

On résume souvent en disant que *la courbe représentative de f est la courbe d'équation $y = f(x)$* .

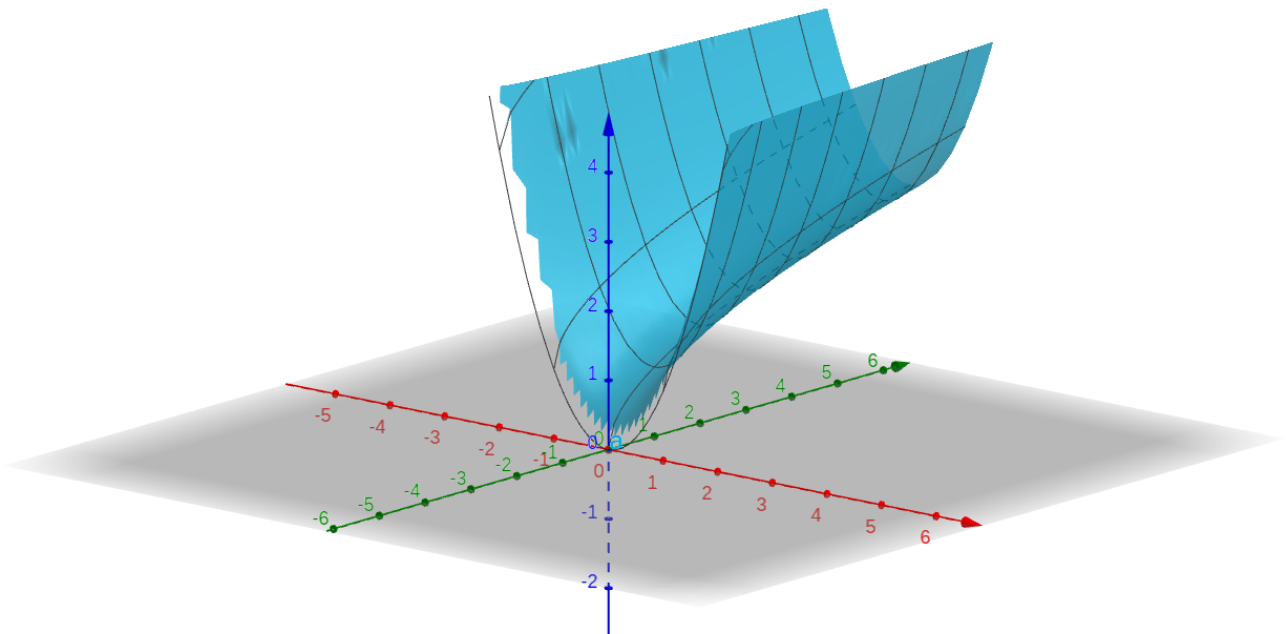
Définition

Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. Le **graphe** de f est l'ensemble

$$\{(x; y; z) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{R} / z = f(x; y)\}$$

Si on le représente dans l'espace muni d'un repère on obtient la **surface** d'équation $z = f(x; y)$.

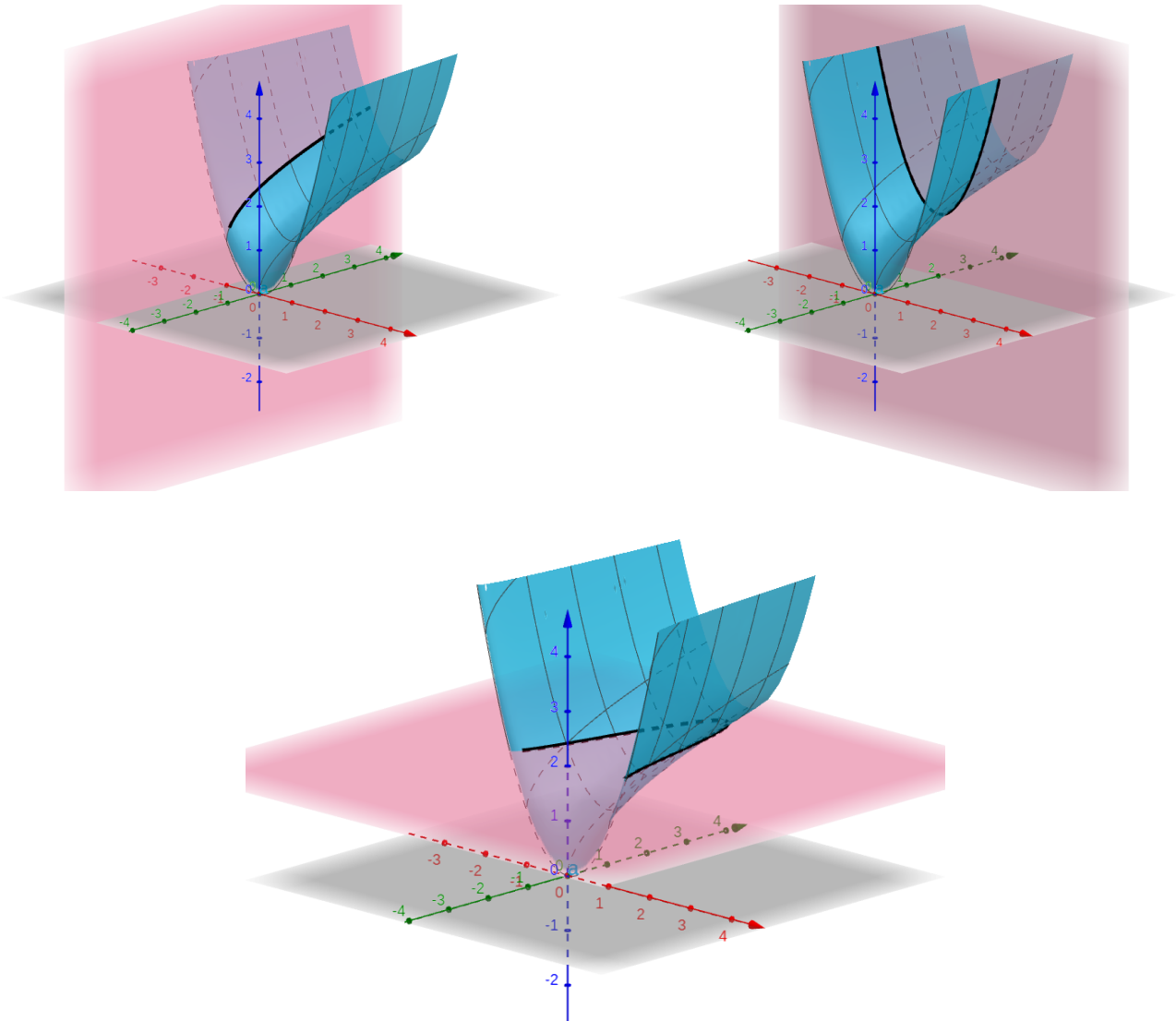
Exemple : la fonction $f(x; y) = x^2 + \sqrt{y}$ est définie sur . Voici une représentation de son graphe :



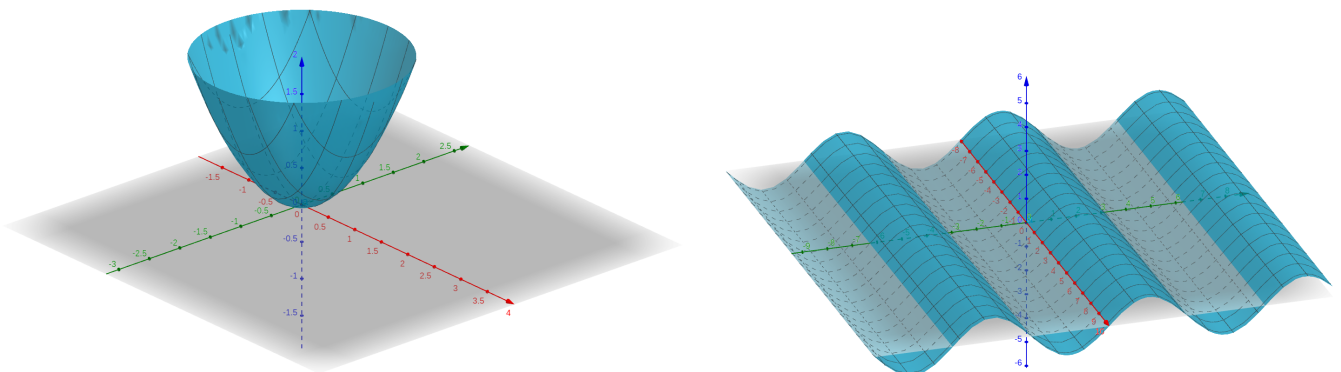
Remarques :

1. Des artefacts numériques apparaissent dans le coloriage de la surface.
2. Identifiez bien quels axes correspondent à quelles coordonnées.
3. Le plan gris a pour équation $z = 0$, ses points sont de la forme $(x; y; 0)$ et ils indiquent les valeurs des variables. L'« altitude » z correspondante est l'image de $(x; y)$ par f .

Pour comprendre la nature d'une surface, il est habituel de considérer ses intersections avec des plans perpendiculaires aux axes, c'est-à-dire d'équations $x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$ ou $z = \text{cte}$. On conserve l'exemple précédent, voici les intersections de la surface $z = x^2 + \sqrt{y}$ avec les plans d'équations $x = -1$, $y = 2$ et $z = 2$:



Il est important de s'exercer à visualiser ces plans de coupes et les intersections obtenues, voici deux exemples pour vous entraîner : $z = x^2 + y^2$ et $z = \sin(x)$.



2 Limites et continuité des fonctions de deux variables

2.1 Rappel sur les fonctions à une variable

Soit une fonction réelle f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Supposons que $5 \in \mathcal{D}_f$. On dit que la limite de f en 5 vaut 2 lorsque :

Il y a plusieurs choses à noter :

- la valeur absolue traduit la notion de **distance** dans \mathbb{R} .
- Souvent, on demande que \mathcal{D}_f soit un intervalle ouvert, cela permet de s'assurer que 5 est un point intérieur de \mathcal{D}_f , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de 5 qui soit inclus dans \mathcal{D}_f .

Une fonction réelle f définie sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ lorsque :

On a construit la continuité des fonctions réelles d'abord localement, la notion de voisinage étant sous-jacente, puis globalement en demandant la « continuité locale partout ». Le cheminement sera analogue pour les fonctions de deux variables mais on va commencer par créer les outils adéquats.

2.2 Éléments de topologie de \mathbb{R}^2

Définition

- La **norme euclidienne** de \mathbb{R}^2 est définie pour tout $a = (x; y) \in \mathbb{R}^2$ par $\|a\| =$
- La distance associée entre deux éléments a et b de \mathbb{R}^2 est $d(a; b) =$

Exemple : la distance entre $a(1; 5)$ et $b(-2; 0)$ est $d(a; b) = \|b - a\| = \|(-3; -5)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Définition

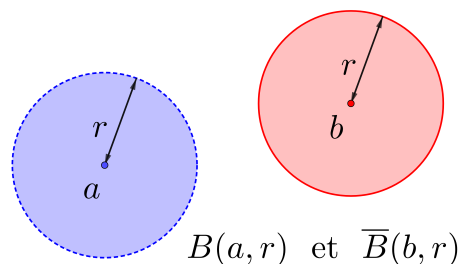
Soit a et b des points de \mathbb{R}^2 et $r > 0$.

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$B(a; r) = \{c \in \mathbb{R}^2 / \quad \quad \quad \}$$

- La **boule fermée** de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a; r) = \{c \in \mathbb{R}^2 / \quad \quad \quad \}$$



Remarques :

- la différence entre les boules ouvertes et fermées correspond au statut de la **frontière** de la boule. Une boule fermée contient sa frontière, une boule ouverte ne contient aucun point de sa frontière.
- Qu'est-ce qui changerait si on augmentait la dimension ? Pas grand chose, si ce n'est l'allure des ensembles. C'est pour anticiper le travail en dimension supérieure qui sera poursuivi l'an prochain qu'on parle de *boule* et de *frontière* plutôt que de parler de *disque* et de *cercle*.
- Les boules ouvertes $B(a, \varepsilon)$ fourniront des voisinages de $a \in \mathbb{R}^2$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On dit que A est un **ouvert** de \mathbb{R}^2 lorsque $A = \emptyset$ ou bien lorsque $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A$.

Exemples : la droite $y = x$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 , l'ensemble décrit par $y > x^2$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2.3 limites et continuité des fonctions de deux variables

Définition

Soit A un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

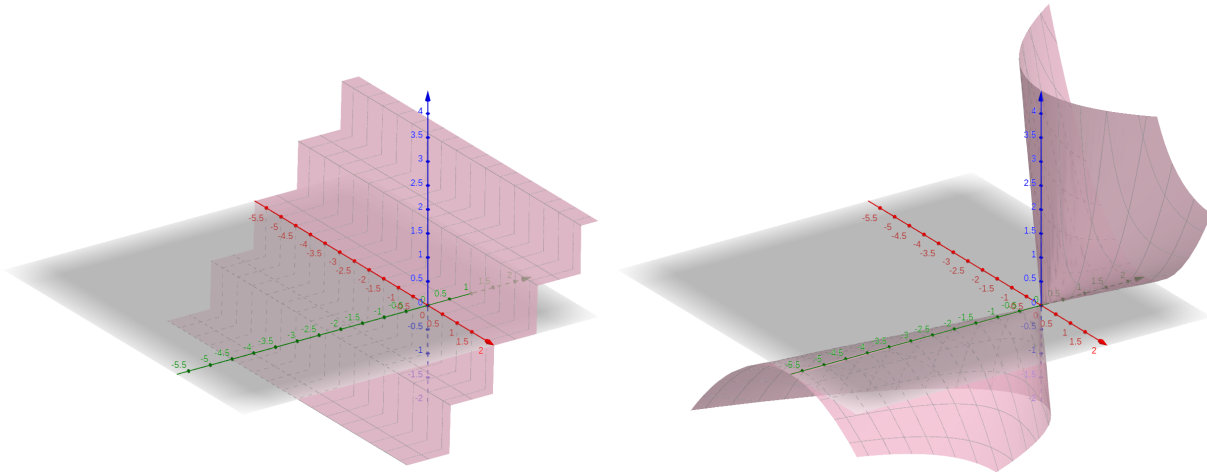
— On dit que f admet comme limite ℓ en a lorsque :

On note alors $\lim_{(x;y) \rightarrow a} f(x;y) = \ell$.

— On dit que f est continue en a lorsque :

— On dit que f est continue sur A lorsque :

Exemple : les graphes de $f(x,y) = \lfloor y \rfloor$ et $g(x,y) = \frac{x^2}{y}$ sont représentés ci-dessous. Ces fonctions sont-elles continues sur leurs domaines de définition ?



Proposition (La continuité se conserve par opérations)

L'ensemble des fonctions continues sur l'ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$ est stable par combinaison linéaire, par produit et par quotient quand le dénominateur ne s'annule pas.

Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Attention : faire tendre $(x;y)$ vers a ce n'est pas faire tendre x vers x_a puis y vers y_a (ou le contraire), il y a beaucoup d'autres façon pour $(x;y)$ de se rapprocher de a .

Remarque : en conséquence de la proposition, les fonctions polynômiales sont continues.

Le programme précise que l'étude de la continuité d'une fonction de deux variables n'est pas un objectif, on ne développe pas davantage.

3 Dérivées partielles

Définition

Soit A un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $a(x_a; y_a) \in A$. Lorsqu'elles existent et sont finies, les limites

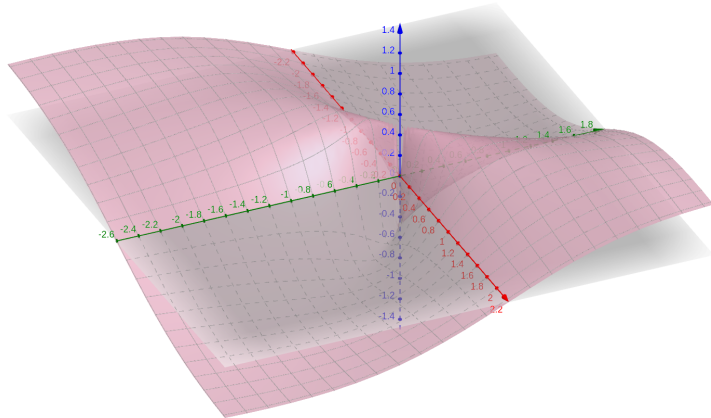
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_a + h; y_a) - f(x_a; y_a)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_a; y_a + h) - f(x_a; y_a)}{h}$$

sont appelées **dérivées partielles** de f en a et notées $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Exemple : soit $f(x;y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$. Déterminer les dérivées partielles de f en $(0;0)$.

Remarque : dire que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_a + h; y_a) - f(x_a; y_a)}{h}$ existe et est finie, c'est dire que la fonction $x \mapsto f(x; y_a)$ est dérivable en x_a . Sa dérivée vaut alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Attention : pour une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la dérivabilité entraîne la continuité. Pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'existence de dérivées partielles ne garantit pas la continuité. Reprenons l'exemple précédent et prouvons que la fonction n'est pas continue en $(0; 0)$.



Remarques :

- a) la notion qui prolonge à \mathbb{R}^2 la dérivation dans \mathbb{R} est la différentiabilité, ce sera vu l'an prochain.
- b) Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles sont des fonctions de deux variables.

Méthode (Pour calculer les dérivées partielles)

- Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que y est une constante et on dérive « selon x ».
- Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, on procède de façon analogue en fixant x .

Exemple : $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^x) =$

Définition

Soit A un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur A lorsque f admet des dérivées partielles en tout a de A et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.

Proposition

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert non-vide A de \mathbb{R}^2 , et $a = (x_a; y_a) \in A$. f admet un développement limité à l'ordre 1 en a : pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_a; y_a) + (h; k) \in A$ on a

$$f(x_a + h; y_a + k) \underset{(h;k) \rightarrow (0;0)}{=} f(x_a; y_a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_a; y_a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_a; y_a) + o(\|(h; k)\|)$$

Remarque : conformément au programme, ce résultat est admis.

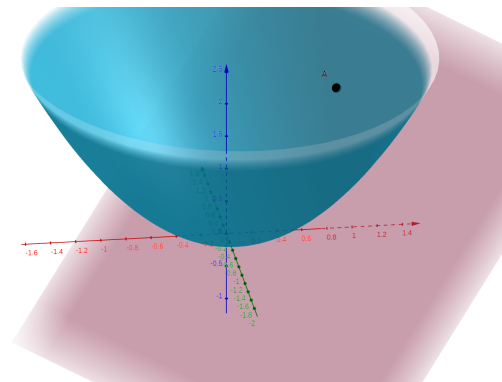
Interprétons la notion de développement limité. Pour $(x; y)$ voisin de $(x_a; y_a)$, on a :

$$f(x; y) \simeq f(x_a; y_a) + (x - x_a) \frac{\partial f}{\partial x}(x_a; y_a) + (y - y_a) \frac{\partial f}{\partial y}(x_a; y_a)$$

La surface $z = f(x_a; y_a) + (x - x_a) \frac{\partial f}{\partial x}(x_a; y_a) + (y - y_a) \frac{\partial f}{\partial y}(x_a; y_a)$ est celle du **plan tangent** à $z = f(x; y)$.

Ci-contre, la surface $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ et son plan tangent au point $(1; 1; 1)$.

L'équation de ce plan est $z = \frac{3}{2} + 2(x - 1) + (y - 1)$.



Définition

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert non-vide A de \mathbb{R}^2 , et $a = (x_a; y_a) \in A$.
On identifie \mathbb{R}^2 au plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On appelle **gradient** de f en a , noté $\nabla f(x_a; y_a)$, le vecteur $\frac{\partial f}{\partial x}(x_a; y_a)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_a; y_a)\vec{j}$.

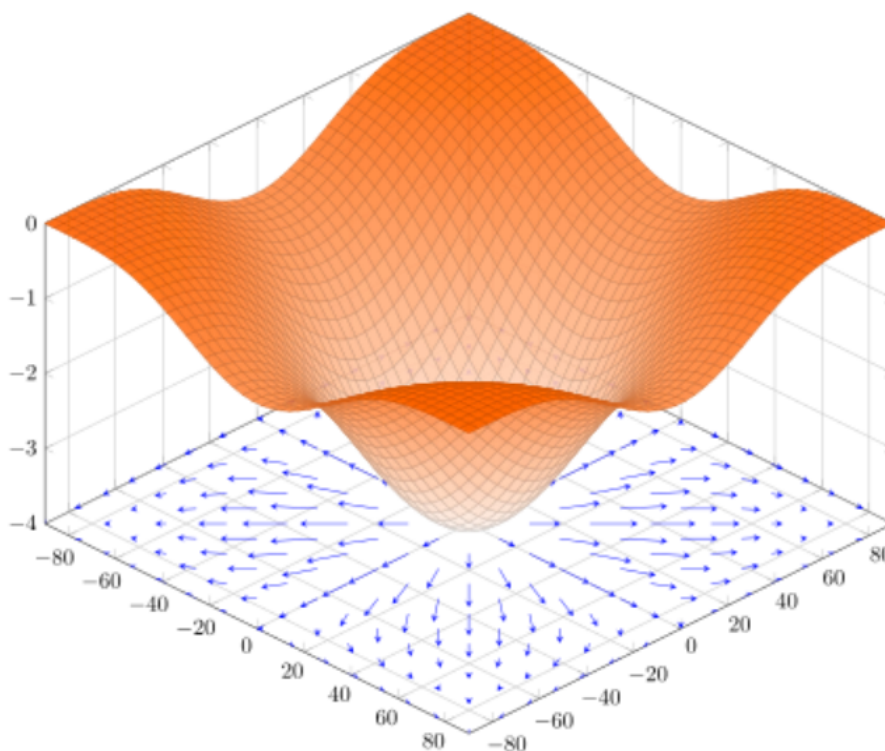
Proposition (Reformulation du développement limité avec le gradient)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert non-vide A de \mathbb{R}^2 , et $a = (x_a; y_a) \in A$.
Pour $(h; k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(a + (h; k)) \underset{(h;k) \rightarrow (0;0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), (h; k) \rangle + o(\|(h; k)\|)$$

Remarque : on peut interpréter géométriquement le gradient. Le gradient en a indique la direction (dans A) dans laquelle f croît le plus vite. Plus la norme du gradient est importante, plus la croissance de f selon cette direction sera importante.

La figure ci-dessous (recupérée sur wikipédia) présente la surface $z = -(\cos(x)^2 + \cos(y)^2)^2$. Le plan en bas est identifié à \mathbb{R}^2 et on y fait figurer les gradients.



4 Dérivées partielles et composées

4.1 Dérivées selon un vecteur

Dans la suite on adoptera les notations suivantes : \mathbb{R}^2 est identifié au plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. A est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , f une fonction définie sur A et $a \in A$.

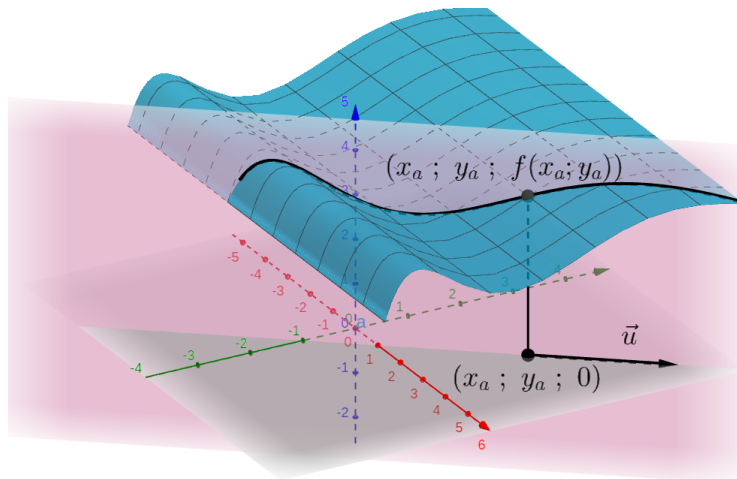
Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur A , la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x; y_a)$ en a , cela correspond à fixer $y = y_a$ et donc à « traverser » $a \in A$ dans la direction de \vec{i} . De façon analogue, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ est la dérivée dans la direction de \vec{j} . On peut généraliser cela :

Définition

Soit $\vec{u}(x_u; y_u)$ un vecteur non nul du plan.

On dit que f admet une **dérivée selon \vec{u} en a** si la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h\vec{u}) - f(a)}{h}$ existe et est finie ; on la note alors $D_{\vec{u}}f(a)$.

Remarque : les notations traduisent un choix pédagogique. La somme $a + h\vec{u}$ a lieu entre deux éléments de \mathbb{R}^2 , je choisis d'en présenter un comme un point et l'autre comme un vecteur car il me semble que c'est la meilleure façon de comprendre ce qui est fait. On se déplace, au voisinage de a , dans la direction de \vec{u} .



Proposition (Dérivée directionnelle à l'aide du gradient)

On conserve les notations précédente. On a : $D_{\vec{u}}f(a) = \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle$.

Démonstration

On conserve les notations.

La fonction à une variable $t \mapsto f(a + t\vec{u})$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$f(a + t\vec{u}) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + tD_{\vec{u}}f(a) + o(t)$$

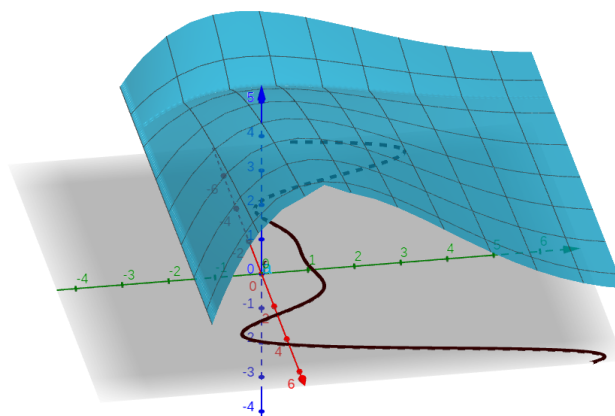
En utilisant la formulation du développement limité de la fonction à deux variables avec le gradient, on a :

$$\begin{aligned} f(a + t\vec{u}) = f(a + (tx_u; ty_u)) &\underset{(tx_u; ty_u) \rightarrow (0;0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), (tx_u; ty_u) \rangle + o(\|(tx_u; ty_u)\|) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), (tx_u; ty_u) \rangle + o(t) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité des fonctions à une variable, on a : $D_{\vec{u}}f(a) = \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle$. ■

4.2 Dérivation selon un arc paramétré

Voyons maintenant ce qui se passe si l'on décide de se déplacer dans A autrement que selon la direction d'un vecteur, cest-à-dire d'une façon non rectiligne, selon un **arc paramétré** tel que représenté ci-dessous :



Définition

Un **arc paramétré de classe** \mathcal{C}^1 du plan est la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ définies et de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Le **support** de l'arc paramétré est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x(t); y(t))$. On dit également que l'arc est une **paramétrisation** du support.

On dit que t est le **paramètre** et on note souvent $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ l'arc paramétré.

Exemple : si $I = \mathbb{R}$, $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ on obtient une paramétrisation du cercle trigonométrique. Ce n'est pas la seule possible, on peut :

- changer l'intervalle en prenant $I = [0; 2\pi]$ et à ce moment-là chaque point du support n'est visité qu'une fois;
- permuter le rôle de \cos et \sin ;
- prendre $x(t) = \cos(t^2)$ et $y(t) = \sin(t^2)$ et alors on modifie la « vitesse » du point mobile $(x(t); y(t))$.

Remarque : parfois, l'intervalle I est implicite, c'est alors le plus grand intervalle sur lequel les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies.

Proposition (Règle de la chaîne)

On considère $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 , défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On suppose de plus que le support de $\gamma(t)$ est inclus dans A .

L'application définie sur I par $F(t) = f(x(t); y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a :

$$\forall t \in I, F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t); y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t); y(t))$$

Remarque : pour démontrer ce résultat, on se sert à nouveau de l'unicité du développement limité.

Proposition (Reformulation avec le gradient)

On conserve les notations. On a :

$$\forall t \in I, F'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Remarque : de façon naturelle, on a noté $\gamma'(t) = (x'(t); y'(t))$.

Définition

On conserve les notations précédentes. Si $f(\gamma(t))$ est constante sur I , alors l'arc $\gamma(t)$ est appelé **ligne de niveau** de la fonction f .

Proposition

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

Démonstration

Toujours avec les mêmes notations, si $\gamma(t)$ est une ligne de niveau, on a d'une part : $(f \circ \gamma)'(t) = 0$.

Mais, d'autre part, on sait que $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$. ■

4.3 Composition (plus compliquée) avec des fonctions de deux variables

Proposition (Règle de la chaîne, version longue)

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit O un ouvert de \mathbb{R}^2 , x et y deux fonctions $O \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

$F : \begin{cases} O & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u; v) & \mapsto f(x(u; v); y(u; v)) \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur O et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u; v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u; v); y(u; v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u; v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u; v); y(u; v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u; v)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u; v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u; v); y(u; v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u; v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u; v); y(u; v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u; v)$$

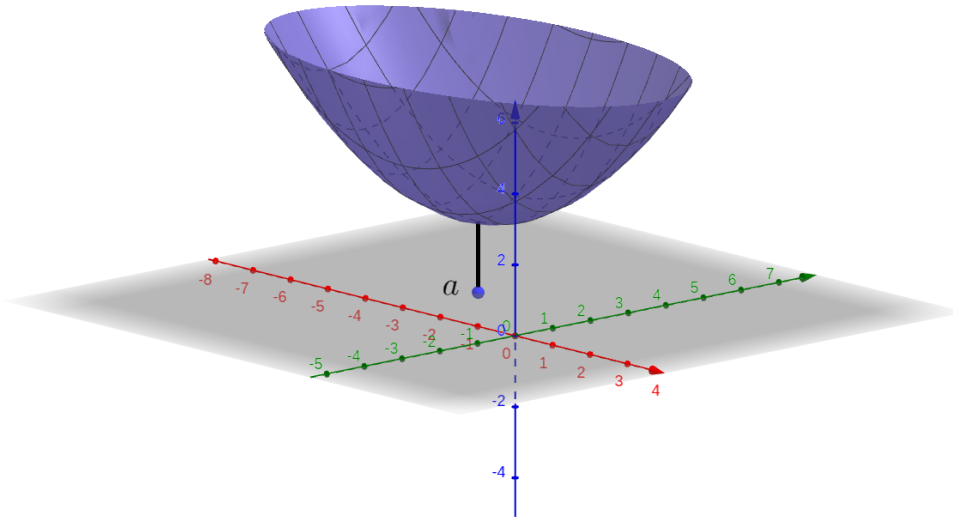
5 Extremums d'une fonction à deux variables

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie sur A , à valeurs dans \mathbb{R} , soit $a \in A$. On dit que :

- f admet un **maximum global** en a lorsque :
- f admet un **minimum global** en a lorsque :
- f admet un **extremum global** en a quand f admet un maximum global ou un minimum global en a .

Exemple : sur la figure ci-dessous, qui représente la surface $z = f(x)$, f admet un minimum global en a .



Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie sur A , à valeurs dans \mathbb{R} , soit $a \in A$. On dit que :

- f admet un **maximum local** en a lorsque :
- f admet un **minimum local** en a lorsque :
- f admet un **extremum local** en a quand f admet un maximum local ou un minimum local en a .

Remarque : un extremum global est un extremum local, mais la réciproque est fausse.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , à valeurs dans \mathbb{R} .

On dit que $a \in A$ est un **point critique** de f lorsque $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Exemple : $(0;0)$ est un point critique de $f(x; y) = x^2 - y^2$. En effet, $\nabla f =$

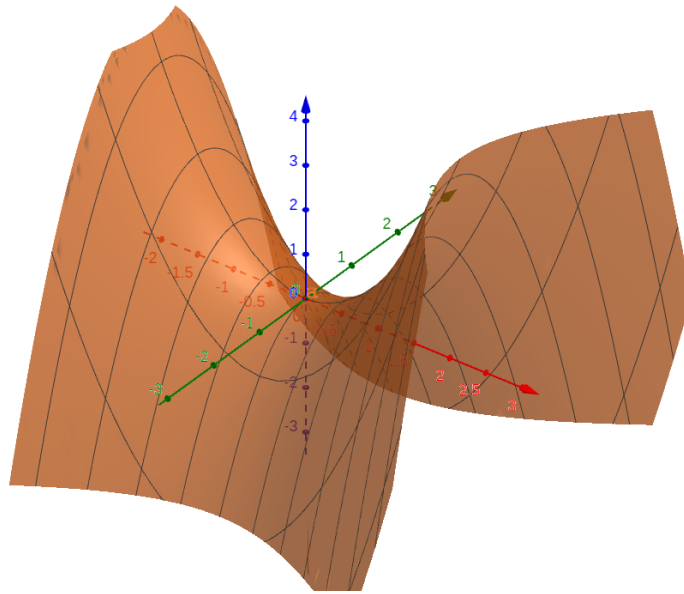
Proposition (Condition nécessaire pour avoir un extremum local en a pour les fonctions \mathcal{C}^1)

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , à valeurs dans \mathbb{R} et soit $a \in A$.

Démonstration

Comme f admet un extremum en a , la fonction $g : t \mapsto f(x; y_a)$ en admet également un en x_a et donc sa dérivée s'annule en x_a . Or, $g'(x_a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$. De façon analogue, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ et $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Attention : la réciproque est fautive! Un point critique est peut-être un extremum, mais ce n'est pas certain. L'exemple précédent fournit un contre-exemple, comme on le voit sur la figure ci-dessous :



Remarque : dans l'exemple précédent, on dit que le point $(0; 0; 0)$ est un **point selle**.

Méthode (Pour chercher les extremums d'une fonction régulière sur un ouvert)

1. On commence par chercher les points critiques.
2. Pour chaque point critique a , on étudie le signe de $f(x) - f(a)$.
 - Si ce signe est constant sur un voisinage de a alors f a un extremum local en a . On peut être amené à faire un développement limité.
 - Si ce signe est constant sans condition sur x alors f a un extremum global en a .
 - S'il n'existe pas de voisinage de a sur lequel ce signe soit constant, alors f n'admet pas d'extremum en a .

Exemple : Trouvons les extremums de $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy$.