Systèmes Linéaires

Nous avons rencontré beaucoup de situations conduisant à des "petits" systèmes linéaires : deux ou trois équations et deux ou trois inconnues. Par exemple, si l'on résout l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = \cos 2t$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on aura deux résolutions de systèmes à effectuer.

L'objet de ce chapitre est double : en premier lieu, nous allons proposer un algorithme qui permettra de résoudre tous les systèmes d'équations linéaires. Ce cadre nous permettra également d'introduire des notions d'algèbre linéaire qui seront approfondies au second semestre.

Pour simplifier les notations, on va travailler avec des coefficients réels. Néanmoins, tout ce chapitre s'adapte naturellement à $\mathbb{C}$.

1 Introduction aux Matrices

1.1 Matrices

Définition

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice à n lignes et p colonnes est un tableau de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \dots & a & a \end{pmatrix}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ sont dans $\mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

On dit qu'une telle matrice est de taille (n, p) et on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Soit $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. Le coefficient $a_{i,j}$ est situé

Exemples :

- $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$
- une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$:

Remarque : Une matrice à n lignes et p colonnes a coefficients.

Définition

Suivant le nombre de lignes et de colonnes, un peu de vocabulaire :

— On parle de **matrice ligne** lorsque

— On parle de **matrice colonne** (ou simplement **colonne**) lorsque

— On parle de **matrice carrée** lorsque

Dans ces trois situations, on ne donne que le paramètre qui n'est pas évident.

Exemples :

- une matrice ligne de taille 5 :

- une matrice colonne de taille 3 :

- une matrice carrée de taille 2 :

1.2 Addition de deux matrices de même taille

Définition

Soit deux entiers non nuls n et p. Soit deux matrices A et B **de même taille** (n, p) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

La matrice somme de A et B est la matrice de taille (n, p) :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ -12 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B =$$

Proposition

i. L'addition des matrices est **commutative** :

ii. Soit A une matrice de taille (n, p). On considère $0_{(n,p)}$ la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls. On a :

$$A + 0_{(n,p)} =$$

$0_{(n,p)}$ est appelée **matrice nulle** (sous-entendu "de taille (n, p)").

Remarque : on dit que $0_{(n,p)}$ est l'**élément neutre** pour l'addition des matrices.

1.3 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition

Soit A une matrice de taille (n, p) et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La matrice $\lambda.A$ est la matrice de taille (n, p) dont les coefficients sont ceux de A multipliés par λ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \dots & \lambda \times a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \times a_{n,1} & \dots & \lambda \times a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple : On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ecrire les matrices $3A, 10A, (-1)A$.

Proposition

Soit A une matrice de taille (n, p). On a :

$$0.A = \qquad\qquad \text{et} \qquad 1.A =$$

Remarque : Soit A une matrice de taille (n, p). On a $A + (-1)A =$ $\qquad$, $(-1)A$ sera noté $\qquad$ et appelé

1.4 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition

Soit deux entiers non nuls n et p. Soit A une matrice de taille (n, p) et soit X une matrice colonne **à** p **lignes** :
Le produit de A et X (**dans cet ordre**) est le vecteur colonne à n lignes noté AX défini par :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

Exemples :

a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

Exercice

Soit A une matrice de taille $(2, 4)$.

a) Par quelle colonne faut-il multiplier A pour que le vecteur colonne obtenu ait comme coefficients les sommes des coefficients des lignes de A ?

b) Par quelle colonne faut-il multiplier A pour obtenir comme résultat la première colonne de A ?

c) Même question pour les autres colonnes de A ?

2 Systèmes Linéaires

2.1 Généralités

Définition

On appelle système linéaire à n équations et p inconnues les systèmes de la forme :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

avec tous les coefficients $a_{i,j}$ et les seconds membres b_i qui sont réels.

Résoudre $\mathcal{S}$ c'est trouver tous les $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ qui satisfont $\mathcal{S}$.

Remarques :

- Lorsqu'il n'y a que deux ou trois variables, on les appelle souvent x, y et z et pas x_1, x_2 et x_3.
- Par commodité, on assimile les éléments de $\mathbb{R}^p$ à des colonnes.

Exemples : Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y & = & -6 \\ 11x-2y & = & 5 \end{array} \right. \quad , \quad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ 3x & - & 2y & = & 5 \\ -x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 8 \\ 2x+y-3z & = & 1 \end{array} \right.$$

Définition

a) On dit qu'un système qui admet (au moins) une solution est **compatible**. Dans le cas contraire on dit qu'il est **incompatible**.

b) Si tous les seconds membres sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

Remarque : un système homogène est compatible car

2.2 Matrice d'un système linéaire

Soit un système linéaire :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

La matrice du système $\mathcal{S}$ est : $A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$. Elle est de taille (n, p).

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors résoudre le système $\mathcal{S}$ c'est résoudre $AX = B$.

On appelle **matrice augmentée** du système $\mathcal{S}$, la matrice de taille $(n, p+1)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

Exemples : On reprend les systèmes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ de l'exemple précédent. Donner leurs matrices, ainsi que leurs matrices augmentées.

2.3 Opérations élémentaires sur les lignes

On considère un système linéaire $\mathcal{S}$, sa matrice A et sa matrice augmentée $(A|B)$. On peut procéder sur ces trois objets aux trois opérations suivantes :

- pour $i \neq j$, permuter les lignes i et j : $L_i \leftrightarrow Lj$
- multiplier la ligne L_i par un réel (non nul) : $L_i \leftarrow \lambda.Li$
- pour $i \neq j$, ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j : $L_i \leftarrow L_i + \lambda.Lj$

Définition
Deux systèmes $\mathcal{S}$ (ou matrices, ou matrices augmentées) sont équivalents en lignes si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'opérations élémentaires.

Si deux matrices A et A' sont équivalentes en lignes, on note : $A \underset{L}{\sim} A'$.

Exercice
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & 8 \\ -3 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Prouver que A et A' sont équivalentes en ligne.

b) Est-il plus facile de résoudre un système dont la matrice est A ou A' ?

Remarque : les opérations élémentaires sont **réversibles**, autrement dit : on peut revenir en arrière.

- l'opération contraire de $L_i \leftrightarrow Lj$ est :
- l'opération contraire de $L_i \leftarrow \lambda.Li$ est :
- l'opération contraire de $L_i \leftarrow L_i + \lambda.Lj$ est :

Proposition
Deux systèmes équivalents en lignes ont les mêmes solutions.

Remarques :

1. **On vient de justifier la méthode de résolution par combinaison.** En effet, elle consiste à faire des opérations élémentaires pour éliminer des variables jusqu'à obtenir un système simple à résoudre qui a les mêmes solutions que le système initial.
2. Soit $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ deux systèmes équivalents, A et A' leurs matrices, $(A|B)$ et $(A'|B')$ leurs matrices augmentées. Lorsque l'on effectue la suite d'opérations élémentaires qui permet de passer de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ alors on passe de A à A' et de $(A|B)$ à $(A'|B')$. **Cela va permettre de travailler avec les matrices, en « oubliant »les systèmes jusqu'à obtenir une matrice correspondant à un système simple à résoudre.**

3 Algorithme de Gauss

L'algorithme de Gauss va permettre de passer de systèmes quelconques à des systèmes équivalents simples à résoudre : les systèmes dont les matrices sont échelonnées réduites.

3.1 Matrices échelonnée, échelonnée réduite

Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A est échelonnée lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes :

i. Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.

ii. À-partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à-partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente

On appelle alors **pivots** les premiers termes non nuls de chaque ligne, en partant de la gauche.

Exemples : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarques :

- Sur les exemples précédents, entourer les pivots.
- L'idée à mémoriser est qu'une matrice échelonnée est "en escalier".

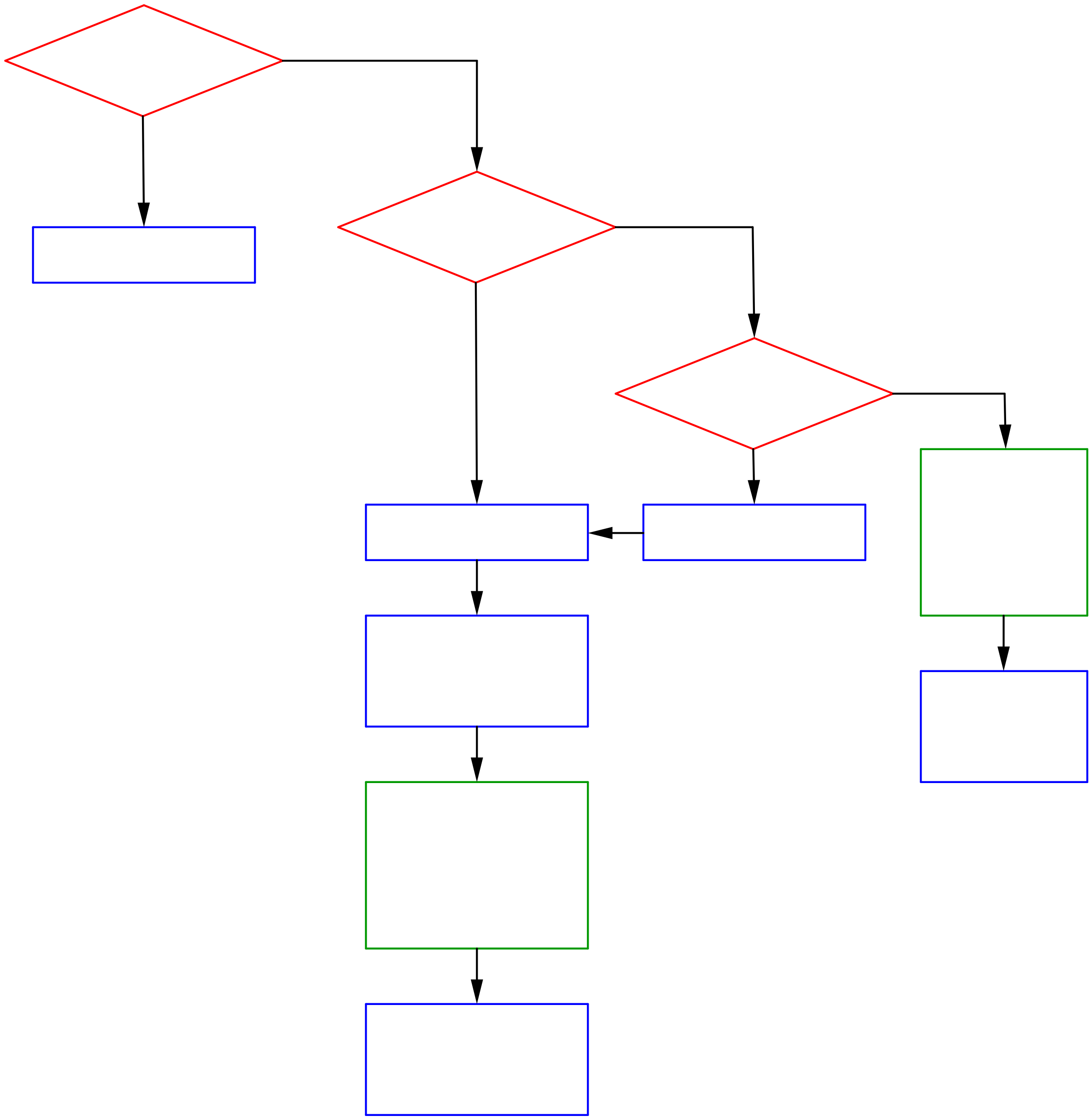
Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, une matrice échelonnée. On dit que la matrice A est échelonnée réduite lorsque ses pivots valent 1 et que les pivots sont les seuls termes non nuls de leurs colonnes.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : un système dont la matrice est échelonnée réduite est-il difficile à résoudre ?

3.2 Pivot de Gauss pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$



3.3 Exemples

a) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_1)$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{7}L_2)$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{41}{7} \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2)$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3.4 Réduction d'une matrice échelonnée

Pour réduire une matrice échelonnée :

— <u>étape 1</u> : on rend tous les pivots égaux à 1 en multipliant les lignes par $\frac{1}{\text{pivot}}$

— <u>étape 2</u> : à-partir de la 2è ligne, on se sert des pivots pour annuler tous les termes au-dessus d'eux dans leur colonne, en faisant des opérations sur les lignes.

Exercice
Appliquer l'algorithme aux matrices échelonnées, équivalentes à A et B, obtenues dans l'exemple précédent.

Théorème
Toute matrice est équivalente à une **unique** matrice échelonnée réduite.

Remarques :

— L'unicité est admise.

— Etant donnée une matrice, l'algorithme de Gauss fournit sa matrice échelonnée réduite équivalente. Du point de vue des systèmes linéaires, on passe donc d'un système quelconque à un système dont la matrice est échelonnée réduite qu'on va voir comment résoudre dans la suite du cours.

4 Résolution d'un système linéaire

Les notations utilisées dans ce paragraphe :

— $\mathcal{S}$ est un système linéaire, A sa matrice et $(A|B)$ sa matrice augmentée

— $\mathcal{S}'$ son système échelonné réduit équivalent, A' sa matrice $(A'|B')$ sa matrice augmentée

Définition

i. on appelle **rang** du système (et de sa matrice A) le nombre de pivots de A'. On note $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$ (ou $\mathrm{rg}(A)$).

ii. les inconnues correspondants aux pivots sont appelées **inconnues principales**, les autres sont appelées **inconnues secondaires (ou paramètres)**

Théorème
(Critère de compatibilité du système)
Le système $\mathcal{S}$ est compatible si et seulement si toutes les lignes nulles de A' correspondent à un coefficient nul de B'.

Démonstration
(Idée de la preuve)
Une ligne nulle de A' va correspondre dans $\mathcal{S}'$ à une équation dont le membre de gauche sera nul. Si le membre de droite (le coefficient de B' correspondant) est un réel non nul k, alors on a une équation absurde de la forme $0 = k \neq 0$ et donc le système n'est pas compatible.
En revanche, si le coefficient de B' est nul, on obtient un équation de la forme $0 = 0$, qui est vraie.

Si toutes les lignes nulles de A' conduisent à des équations de la forme $0 = 0$ alors, le système est compatible et ses solutions sont obtenues en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.■

Exemples : résoudre les systèmes suivants.

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{c} 3x - y - 2z = 2 \\ x + z = 5 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 14 \end{array} \right.$$

Théorème
Soit $\mathcal{S}$ un système compatible. On a alors l'alternative suivante :
- Si $\text{rg}(\mathcal{S}) = p$ alors le $\mathcal{S}$ a une unique solution.
- Si $\text{rg}(\mathcal{S}) < p$ alors le $\mathcal{S}$ a une infinité de solutions.

Remarque : on a $\text{rg}(\mathcal{S}) \leq \min(n, p)$

Démonstration

5 Elements d'algèbre de $\mathbb{R}^n$

5.1 Familles de vecteurs

Dans la suite n désigne un entier naturel non nul. On va considérer des éléments de $\mathbb{R}^n$ qu'on désignera sous le nom de *vecteurs* et on fera la confusion entre ces éléments et leur écriture comme des colonnes.
On rappelle des définitions qui ont déjà été vues :

Définition
Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- Une **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{F}$

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) =$$

Définition
Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** s'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1; p]\!],\ \lambda_i = 0$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exercice
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (u, v, w) est-elle libre ou liée ?

Remarque : ces définitions ne sont pas limitées aux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on aura les mêmes dans nimporte quel espace vectoriel. La seule contrainte de ces définitions est que les combinaisons linéaires doivent porter sur un nombre fini de vecteurs (quel sens donnerait-on à une somme infinie ?).

Proposition
Soit p un entier naturel non nul et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Soit A la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \dots u_p$. A est donc de taille

On a équivalence entre :

i. La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre.
ii. Le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale 0_p.
iii. Le nombre de pivots de A est p.
iv. $\mathrm{rg}(A) = p$

Démonstration
Savoir si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou liée c'est savoir s'il existe $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \backslash \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Cela conduit à la résolution d'un système à n équations et p inconnues dont la matrice a pour colonnes les vecteurs $u_1, \dots u_p$: la matrice A.
Ce système est homogène, donc compatible, et dire que sa seule solution est la solution triviale revient à dire que la famille (u_i) est libre.
Le système n'a pas d'autres solutions que $0_{\mathbb{R}^p}$ si et seulement si il n'y a pas d'inconnues secondaires, ce qui revient à dire que donc le nombre de pivots est p. C'est est équivalent à dire que le rang du système est p.■

5.2 Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$

Définition
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est dite **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ lorsque $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathbb{R}^n$.

Dire que $(u_1, \dots, u_p)$ est **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ revient à dire que pour tout $B \in \mathbb{R}^n$ il existe une combinaison linéaire des $(u_1, \dots, u_p)$ qui vaut B :

$$x_1 u_1 + \dots x_p u_p = B \Longleftrightarrow AX = B$$

avec A la matrice dont les colonnes sont $u_1, \dots, u_p$.

On en déduit la propriété suivante :

Proposition
Sont équivalents :

i. La famille $(u_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
ii. Pour toute matrice colonne $B \in \mathbb{R}^n$, le système $AX = B$ est compatible/
iii. Le nombre de pivots est égal à n.

Exercice
On travaille dans $\mathbb{R}^3$.
Prouver que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Exprimer $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de cette famille.