Fonctions : dérivation et applications.

I désigne un intervalle (non vide, non réduit à un point) et a un réel de I.
f est une fonction définie sur I, $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 Qu'est ce que la dérivation ?

1.1 Dérivabilité

Définition

- On dit que f est dérivable en a lorsque

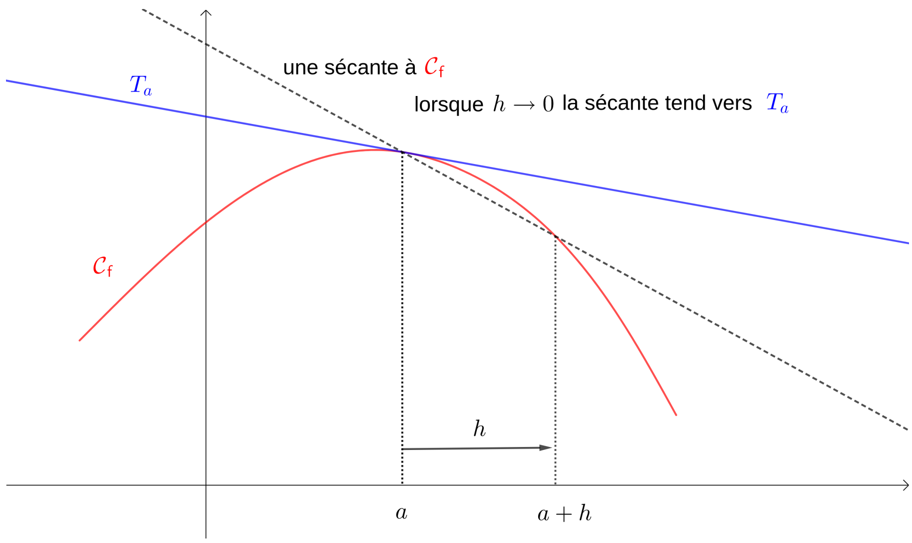
  On la note alors

- On appelle *domaine de dérivabilité* de f l'ensemble des réels où f est dérivable. On a alors une nouvelle fonction définie sur cet ensemble notée f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Remarques :

a) La dérivabilité en a est une notion locale en a. On le matérialise souvent en faisant le changement de variable $x = a + h$ (c'est-à-dire en faisant une composition) et on étudie alors

b) Lorsqu'il existe, le nombre dérivé est la limite du



Proposition

- Si f est dérivable en a alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a ; une de ses équations est :

- la réciproque est vraie : si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a alors f est dérivable en a et $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration
Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

En écrivant, pour $x\neq a$, $f(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)$ on a $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f'(a)\times 0+f(a)=f(a)$ et donc f est continue en a. ■

Remarque : on a une relation d'inclusion :

$$\text{domaine de dérivabilité} \subset \text{domaine de continuité} \subset \text{domaine de définition}$$

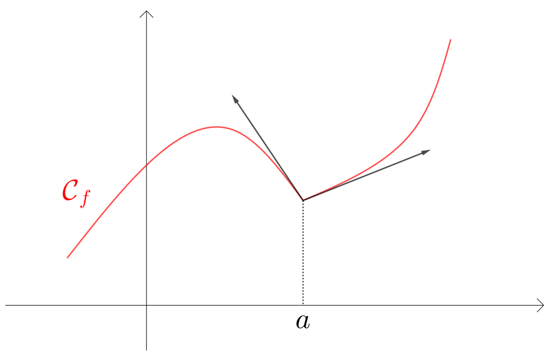
Théorème
Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition **sauf** :
- $x\mapsto\sqrt{x}$ en 0 (ainsi que toutes les racines n-ièmes pour $n\leq 2$) ;
- $x\mapsto|x|$ en 0 ;
- arccos et arcsin en ±1 ;
- $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ en tout $a\in\mathbb{Z}$.

Remarque : la dérivabilité des fonctions de référence se prouve à l'aide des définitions ou des opérations sur les dérivées qu'on verra au point 2.

Exercice
À l'aide de la définition, prouver que $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, que $x\mapsto x^n$ ($n\in\mathbb{N}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, préciser les fonctions dérivées.

1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

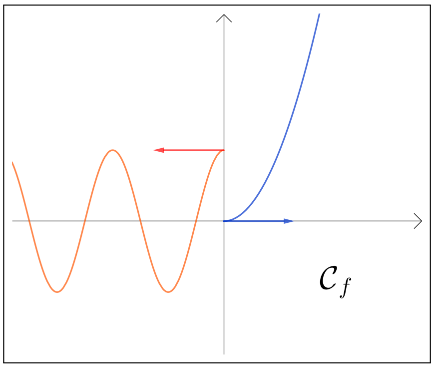
Définition
On dit que
- f est dérivable **à gauche** en a lorsque
- f est dérivable **à droite** en a lorsque
- $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente** au point d'abscisse a lorsque

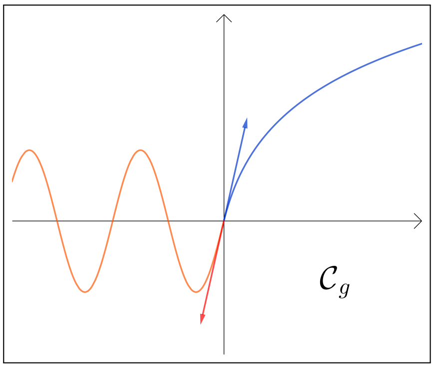


Remarque : on note $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite en a lorsqu'ils existent.

Proposition
Soit f continue en a.
f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a et que ces deux dérivées sont égales.

Exemple : les fonctions $f : x \longmapsto \begin{cases} \cos x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ et $g : x \longmapsto \begin{cases} \sin x \text{ si } x \leq 0 \\ \ln(x-1) = \text{ si } x > 0 \end{cases}$ sont dérivables à gauche et à droite en 0, les nombres dérivés coïncident mais seule g est dérivable en 0.





1.3 Dérivées d'Ordre Supérieur

Définition
Soit f définie sur I.

i. on appelle **dérivée n-ième** de f la fonction notée $f^{(n)}$ et définie par récurrence de la façon suivante :
$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \end{cases}$$

ii. $f^{(n)}$ est également notée $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$

iii. si $f^{(n)}$ est continue, on dit que f **est de classe $\mathcal{C}^n$**

iv. on note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

v. on note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I

Théorème
Les ensembles $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont stables par les opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, quotient par une fonction qui ne s'annule pas, combinaison.

Théorème
Les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de dérivation.

Exemple : $f(x) = \frac{\cos(x^2+x)}{e^x}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1.4 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

La définition telle qu'elle a été formulée est valable pour les fonctions à valeurs complexes.
La différence fondamentale est que les représentations graphiques sont plus difficiles à envisager *(mais ce n'est pas impossible, pouvez-vous imaginer comment procéder ?)* et qu'en conséquence la notion de tangente est moins naturelle.

2 Comment trouver une fonction dérivée ?

2.1 Opérations sur les dérivées

Théorème
Si f et g sont dérivables en a alors :

i. pour tous réels λ et μ, $\lambda f+\mu g$ est dérivable en a et on a : $(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a)$

ii. $f\times g$ est dérivable en a et on a : $(f\times g)'(a)=f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a)$

iii. si $g(a)\neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$

Démonstration
Par exemple pour le

.

■

Théorème
Si g est dérivable en a et que f est définie et dérivable en $g(a)$ alors $f\circ g$ est dérivable en a et on a $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

Dans le cas particulier des fonctions bijectives, ce résultat permet d'établir le nombre dérivé de la réciproque

Proposition
Si f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et est dérivable en a avec $f'(a)\neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$\forall a\in f(I) \qquad (f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$$

Remarque : Tous les résultats précédents portent sur la dérivabilité en un point a, ils se prolongent naturellement au domaine de dérivabilité.

Exercice
Retrouver les formules pour les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques.

2.2 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème
Si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $f'(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l quand x tend vers a.

Remarque : ce théorème va servir à étudier la dérivabilité de f en a. Plutôt que de regarder la limite du rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on va regarder la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a.

2.3 Formule de Leibniz

Théorème
(Leibniz)
Si f et g sont dans $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ alors, fg aussi et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration
On procède par

.

■

2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. f est dérivable sur I si, et seulement si,

On a alors :

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\mathrm{d}e^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{d}x} =$

3 Application des dérivées

3.1 Approximation locale

Interprétons analytiquement la notion de tangente : localement, f est approchée par un polynôme (ici de degré 1). Cette formulation en termes de fonction s'appelle **développement limité** (ici d'ordre 1). Concrètement, au voisinage de a on a f qui est la somme d'une fonction affine et d'un reste qui est négligeable devant une fonction affine.

Proposition

- Si f est dérivable en a alors f admet un DL1 en a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

  Avec ε qui désigne

- la réciproque est vraie : si f admet un DL1 en a alors f est dérivable en a.

Remarques :

a) un DL1 en a est donc une expression de la forme $f(a+h) = mh + p + h\varepsilon(h)$ et on a $m = f'(a)$ et $p = f(a)$.

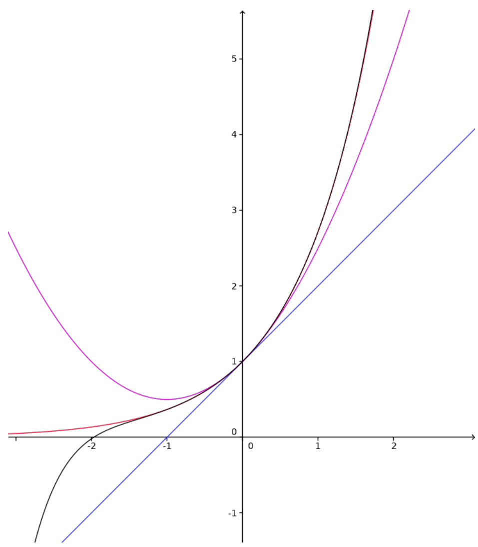
b) Cet outil a déjà été utilisé

Exemples :

1. Donner le DL1 de exp en 0.

   Ci-contre, on représente exp ainsi que ses DL aux ordres 1, 2, et 7 en 0.

2. Que dire d'une fonction dont un DL1 en 3 est $5 - 2h + o(h)$?



Remarque : on étudiera les développemens limités de façon plus poussée dans un prochain chapitre ; on verra en particulier l'unicité du DL qui est implicite ici.

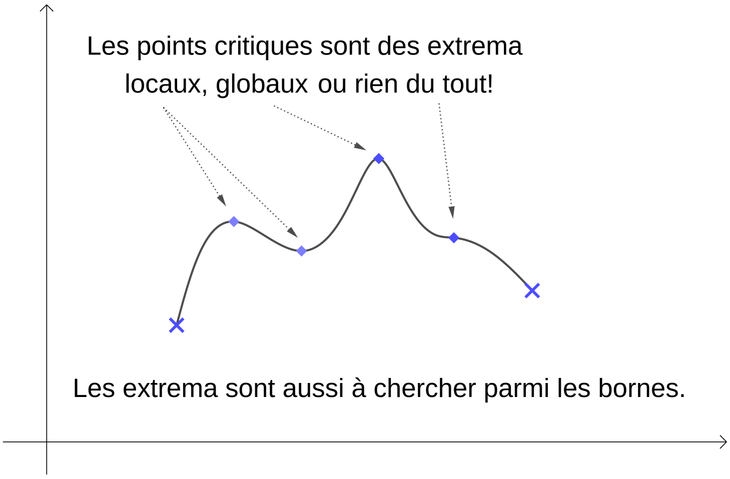
3.2 Etude des variations et recherche d'extremas

Vu et re-vu :

Proposition
Si f' est de signe constant sur un intervalle $J \subset I$ alors f est monotone sur cet intervalle J.

Ce résultat a deux conséquences importantes sur l'utilisation de la dérivée :

1. <u>Trouver les extremas</u> : à-partir de l'étude du signe de f' on peut construire le tableau de variations de f. Grace au tableau de variations on peut trouver les **extremas locaux et globaux** de f.
   Remarque : les extremas de f sont à trouver parmi les extrémités du domaine d'étude ainsi que les points d'annulation de f' (qu'on appelle *points critiques*).



2. <u>Prouver que f est bijective</u> : si f' est strictement positive (respectivement négative) sur I alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I et réalise donc une bijection de I sur $f(I)$.
   Remarque : f' peut s'annuler en un nombre fini de points.

On en profite pour revenir sur le cas particulier des bijections :

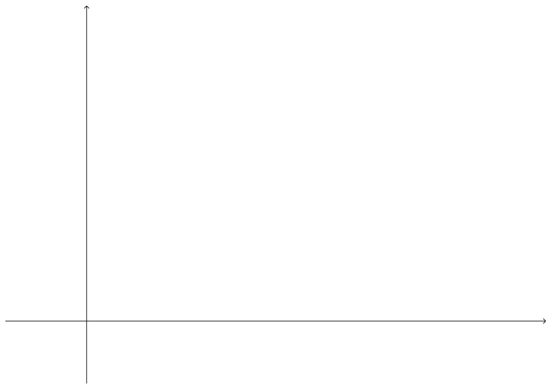
Théorème
(Théorème de la bijection)
Soit f est dérivable sur I. Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I et f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante sur $f(I)$, dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in f(I), \quad {f^{-1}}'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

3.3 Théorème de Rolle et Accroissements Finis

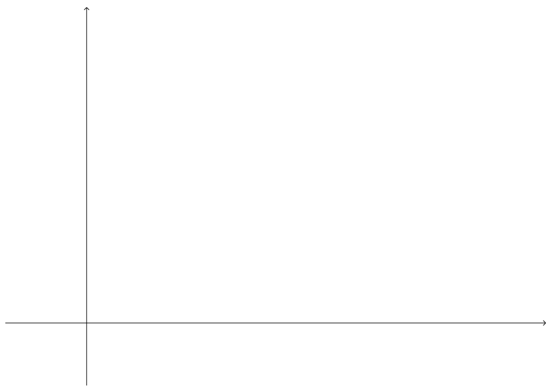
Théorème
(Théorème de Rolle)
Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$, dérivable sur $]a;b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors



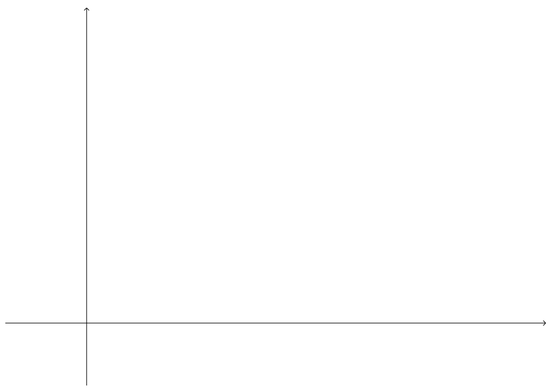
Remarque : interprétation graphique et cinématique : si la vitesse aux moments a et b est la même alors il existe un moment auquel l'accélération est nulle.

Théorème
(Théorème des Accroissements Finis)
Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors



Théorème
(Inégalité des Accroissements Finis)
Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a;b[, \ |f'(x)| \leq M$ alors on a :

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$



Remarques :

1. on peut interpréter cette intégalité graphiquement : f ne peut pas varier plus que selon sa tangente la plus pentue.
2. Une fonction f qui vérifie $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ est dite M-lipschitzienne sur I.