

Table des matières

I. Régularité des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$.	2
I.1 Dérivabilité	2
I.2 Les espaces $\mathcal{C}^k$	2
II. Arcs paramétrés	3
II.1 Définitions	3
II.2 Paramétrisations régulières	4
II.3 Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$	5
III. Compléments sur la dérivation	6
III.1 Dérivation et linéarité	6
III.2 Dérivation et linéarité	6
III.3 Dérivation et composée	6
IV. Tangente à une courbe plane	7
V. Etude locale d'une courbe plane : HP	8
V.1 Développement limité vectoriel	8
V.2 Branches infinies d'une courbe planes	9
VI. Plan tangent à une surface	9
VI.1 Introduction : paramétrisation d'une surface	9
VI.2 Point régulier	10
VI.3 Plan tangent	10

Pré-requis

Objectifs

I. Régularité des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$.

I.1 Dérivabilité

Définition 1.

Soit I un intervalle réel.

Une application $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **dérivable** en $a \in I$ si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (\vec{f}(x) - \vec{f}(a)) = \ell$$

Si tel est le cas, on note $\vec{f}'(a)$ ou $\frac{d}{dt} \vec{f}(a)$ la valeur de cette limite, et on l'appelle **vecteur vitesse** de $\vec{f}$ en a .

Proposition 1 (DL1 vectoriel).

Si $\vec{f}$ est dérivable en a , alors :

$$\vec{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \vec{f}(a) + h \vec{f}'(a) + \vec{o}(h)$$

démonstration : cas $n = 2$:

On sait que $x(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} x(a) + hx'(a) + o(h)$ et $y(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} y(a) + hy'(a) + o(h)$,

donc vectoriellement : $\begin{pmatrix} x(a+h) \\ y(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \vec{o}(h) \quad \square$

Remarque 1. Toute fonction dérivable est continue.

Remarque 2. Une fonction est dérivable ssi elle admet un DL1.

Proposition 2.

Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.

démonstration : par linéarité de la dérivation des composantes.

I.2 Les espaces $\mathcal{C}^k$

Définition 2.

Une application $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **de classe $\mathcal{C}^k$** en $a \in I$ les fonctions $\vec{f}, \vec{f}', \dots, \vec{f}^{(k-1)}$ sont dérivables en a et si $\vec{f}^{(k)}$ est continue en a .

Proposition 3.

Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^k$ en tout point de I .

Remarque 3. $\vec{f}''(a)$ est le vecteur accélération :

$$\vec{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \vec{f}(a) + h \vec{f}'(a) + \frac{h^2}{2} \vec{f}''(a) + \vec{o}(h^2)$$

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k .

II. Arcs paramétrés

Cadre : $E = \mathbb{R}^2$ (resp. $E = \mathbb{R}^3$) muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

On pourra identifier (abusivement) les vecteurs de E à leurs vecteurs de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui les représentent dans la base canonique (resp. $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

II.1 Définitions

Définition 3.

On appelle **arc paramétré** toute application $\gamma : I \longrightarrow E$ continue, avec I intervalle réel.

Remarque 4. On appelle **courbe paramétrée** (continument) tout ensemble Γ de points de E tel qu'il existe I un intervalle réel, et $\gamma : I \rightarrow E$ continue tels que :

$$\Gamma = \{\gamma(t); t \in I\}$$

On dit aussi que γ est une **paramétrisation** (continue) de Γ .

exemple 1. Dans l'espace, l'arc paramétré $F : [0, 9\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t \cos(t), t \sin(t))$ a pour graphe :



exemple 2. Dans le plan, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1, -2)$ et dirigée par $\vec{d}(3, 4)$ peut être paramétrée par $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (1 + 3t, -2 + 4t)$

exemple 3. Dans l'espace, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1, 0, -2)$ et dirigée par $\vec{d}(3, 4, 5)$ correspond à l'arc paramétré $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (1 + 3t, -4t, -2 + 5t)$

Remarque 5. Interprétation : tout arc paramétré correspond à la trajectoire d'un mobile : **cinématique**

Définition 4.

On appelle **arc plan** toute application $F : I \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ continue.

On dit alors que F est une paramétrisation de $\Gamma = \{F(t), t \in I\}$.

Définition 5.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow E$ est dit de **classe $\mathcal{C}^k$** si γ est de classe $\mathcal{C}^k$.

On dit alors que γ est une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe $\Gamma = \gamma(I)$

II.2 Paramétrisations régulières

Définition 6.

Un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dit **régulier** si $\gamma' : I \rightarrow E$ ne s'annule pas sur I .

Définition 7.

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I , le **vecteur vitesse** à l'instant t_0 est le vecteur $\vec{\gamma}'(t_0)$.

Notation : Le vecteur vitesse $\vec{\gamma}'(t_0)$ à l'instant t_0 peut également être noté $D\gamma(t_0)$. On a $\vec{\gamma}'(t_0) = D\gamma(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)]$

Il s'identifie au vecteur colonne $\overrightarrow{Grad(\gamma)}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) \\ \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \\ \frac{d\gamma_3}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$ qui est appelé (vecteur) **gradient** en t_0 de $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.

Définition 8.

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I , la **tangente** à la courbe au point de paramètre t_0 est la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{\gamma}'(t_0)$

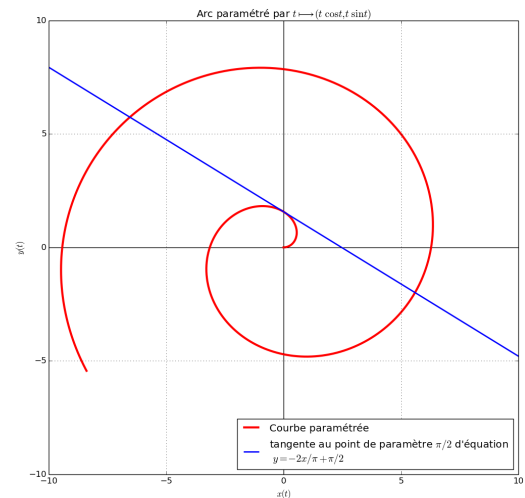
exemple 4. Pour la courbe paramétrée par

$F : [0, 9\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t))$, la tangente au point de paramètre t_0 passe par le point $(t_0 \cos(t_0), t_0 \sin(t_0))$ et est dirigée par le vecteur $(\cos(t_0) - t_0 \sin(t_0), \sin(t_0) + t_0 \cos(t_0))$

Pout $t_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est la droite passant par le point $A(0, \frac{\pi}{2})$ et dirigée par le vecteur $\vec{t}(-\frac{\pi}{2}, 1)$.

Elle a pour équation cartésienne $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$, pour $M(x, y)$, soit

$$y - \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{2}x = 0$$



Proposition 4 (D.L.1).

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Au voisinage de t_0 dans I , on a :

$$\gamma(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \gamma(t_0) + (t - t_0) \gamma'(t_0) + \vec{o}((t - t_0))$$

ou encore

$$\gamma(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \gamma(t_0) + h \gamma'(t_0) + \vec{o}(h)$$

Définition 9.

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $t_0 \in I$, le vecteur accélération à l'instant t_0 est le vecteur $\vec{\gamma}''(t_0)$.

II.3 Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$

Etant donné l'expression de $(x(t), y(t))$:

1. On détermine l'**ensemble de définition** Δ commun de x et y .
2. En cas de **périodicité** commune de x et y , on se contente de faire l'étude sur un intervalle Δ_2 de longueur T si x et y sont T -périodiques.
3. Parfois, on peut trouver des **symétries**, par exemple si $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$, il y a une symétrie par rapport à l'axe (Ox) , et on peut réduire l'étude à $\Delta_2 \cap [0, +\infty[$ etc...
4. On détermine les **points réguliers**.
5. On dresse un **grand tableau de variations** avec dans cet ordre $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$

Lorsque $x'(t)$ s'annule en un point régulier, la tangente est verticale. Lorsque $y'(t)$ s'annule en un point régulier, la tangente est horizontale.

6. On trace l'arc paramétré.

H.P. *N.B.* : Lorsqu'au voisinage d'une valeur t_0 finie ou infinie il y a des limites infinies, ou si le point de paramètre t_0 n'est pas régulier, on tente une interprétation géométrique (asymptote pour des limites infinies, D.L. et tangente sinon).

Ces techniques ne sont pas exigibles des étudiants PC.

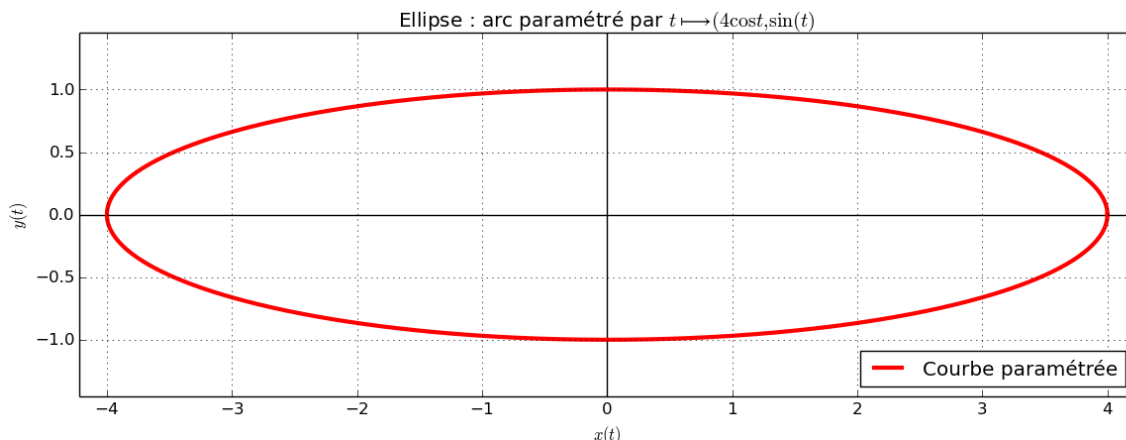
exemple : $M(t) = (x(t), y(t)) = (4 \cos t, \sin t)$

1. $\Delta = \mathbb{R}$. x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Par 2π -périodicité de x et y , il suffit d'étudier la courbe sur $\Delta_2 = [-\pi, \pi]$. Les points obtenus sont parcourus une infinité de fois ($M(t + 2k\pi) = M(t), \forall k \in \mathbb{Z}$)
3. Pour tout $t \in [0, \pi]$, $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$. On peut donc étudier la courbe sur $\Delta_3 = [0, \pi]$ et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe (Ox) .
Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\pi - t \in [\pi/2, \pi]$, et
 $(x(\pi - t), y(\pi - t)) = (-x(t), y(t))$. On peut donc étudier la courbe sur $\Delta_4 = [0, \pi/2]$ et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe (Oy) .
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x'(t), y'(t)) = (-4 \sin t, \cos t) \neq (0, 0)$
Donc tous les points sont réguliers.

5.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	+	-4
$x(t)$	4	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1
$y'(t)$	1	+	0

6. On remarque que pour $t = 0$ la tangente est verticale, pour $t = \pi/2$ la tangente est horizontale



III. Compléments sur la dérivation

III.1 Dérivation et linéarité

Proposition 5.

Soient E euclidien, $f : I \rightarrow E$ dérivable, et $L \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $L \circ f : I \rightarrow E$ est dérivable sur I , et :

$$\forall t \in I, (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

démonstration : $\frac{1}{h}(L \circ f(t+h) - L \circ f(t)) \underset{lin}{=} L \left(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} L(f'(t))$

car toute application linéaire est continue et car $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$ $\square$

III.2 Dérivation et linéarité

Proposition 6.

Soient E, F euclidien, $f, g : I \rightarrow E$ dérivable, et $B : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire.

Alors $B(f, g) : I \rightarrow F$, $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I , et :

$$\forall t \in I, (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

démonstration : $\frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) = \frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t+h))) + \frac{1}{h}(B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t)))$
 $\underset{bilin}{=} B\left(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), g(t+h)\right) + B\left(f(t), \frac{1}{h}(g(t+h) - g(t))\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

car toute application bilinéaire est continue et car $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$ et $\frac{1}{h}(g(t+h) - g(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(t)$. $\square$

exemple 5 (Produit scalaire).

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle = 2 \langle f'(t) | g(t) \rangle$

exemple 6 (Trajectoire orthoradiale).

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tel que : $\forall t \in I, f(t) \perp f'(t)$, alors $t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t) | f(t) \rangle$ est constante : le mouvement est circulaire!

exemple 7. Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$

III.3 Dérivation et composée

Proposition 7.

Soient I, J deux intervalles réels, E euclidien, $\vec{f} : I \rightarrow E$ dérivable et $\varphi : J \rightarrow I$ dérivable.

Alors $\vec{f} \circ \varphi : J \rightarrow E$, $t \mapsto \vec{f}(\varphi(t))$ est dérivable sur J , et :

$$\forall s \in J, (\vec{f}(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s) \vec{f}'(\varphi(s))$$

démonstration :
 $\frac{1}{h}(\vec{f} \circ \varphi(t+h) - \vec{f} \circ \varphi(t)) \underset{DL1}{=} \frac{1}{h}(\vec{f}(\varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)))$
 $\underset{DL1}{=} \frac{1}{h}(\vec{f}(\varphi(t)) + (h\varphi'(t) + o(h))\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)))$
 $= \frac{1}{h}((h\varphi'(t) + o(h))\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)))$
 $= \varphi'(t)\vec{f}'(\varphi(t)) + o(1)\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(\varphi'(t) + o(1)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi'(t)\vec{f}'(\varphi(t))$ $\square$

Remarque 6. En physique on peut changer d'échelle de temps.

IV. Tangente à une courbe plane

Définition 10.

Etant donnée $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$.
On dit que M est un **point critique** sinon.

Remarque 7. En d'autres termes, M est régulier si et seulement si $f(M) = 0$ et $\nabla f(M) \neq \vec{0}$.

Remarque 8. On admet que toute courbe du plan suffisamment « lisse » peut être définie par une telle équation.

Définition 11 (Tangente à une courbe paramétrée).

Si $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)); t \in I\}$ est une courbe de l'espace paramétrée par γ de classe $\mathcal{C}^1$, la tangente à la courbe en un point $M_0 = \gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$.

Proposition 8.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, la tangente à la courbe au point régulier $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation cartésienne :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

démonstration :

on paramètre $\mathcal{C}$ par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Pour tout $t \in I$, on a $g(\gamma(t)) = 0$, donc d'après la règle de la chaîne,

$$0 = \frac{d}{dt}(g(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

ou encore :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}_{g_{\gamma(t)}} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$. $\square$

Une équation cartésienne de la tangente en M est donc $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}}_{g_{\gamma(t)}} = 0$, soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

$\square$

interprétation : meilleure approximation locale donnée par le DL1 :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond à la tangente.

exemple 8. $x^2 + y^2 = 5$: la tangente au point $(1, 2)$ a pour équation $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 = 0$.

V. Etude locale d'une courbe plane : HP

V.1 Développement limité vectoriel

Théorème 9 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soit $\vec{\gamma} : I \rightarrow E$ est un arc régulier de classe C^{n+1} , pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tous t et t_0 dans I , on a :

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \vec{\gamma}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{(t-u)^n}{n!} \vec{\gamma}^{(n+1)}(u) du$$

Théorème 10 (Formule de Taylor-Young).

Soit $\vec{\gamma} : I \rightarrow E$ est un arc régulier de classe C^n , pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tous t et t_0 dans I , on a :

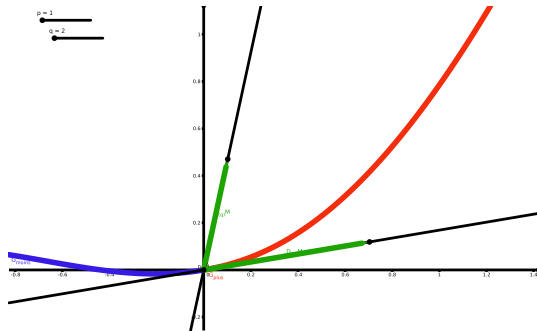
$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \vec{\gamma}^{(k)}(t_0) + \vec{r}(t), \text{ avec } \vec{r}(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \vec{o}((t-t_0)^n)$$

Soient $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $\overrightarrow{OM} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $t_0 \in I$ et $(p, q) \in \mathbb{N}$ le couple d'entiers tel que :

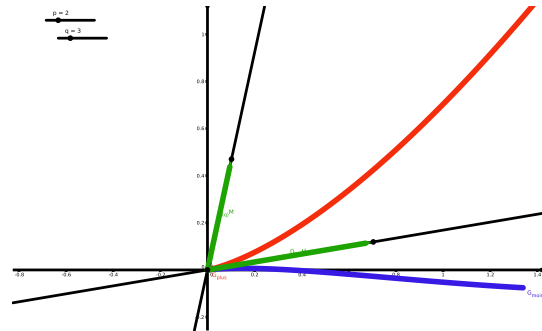
p est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0)$ est non nul. On note $\vec{T} = \overrightarrow{OM}^{(p)}(t_0)$.

q est le plus petit entier $\ell \geq p+1$ tel que pour $\vec{R} = \overrightarrow{OM}^{(q)}(t_0)$, la famille $(\vec{T}, \vec{R})$ est libre. On a donc $1 \leq p < p+1 \leq q$

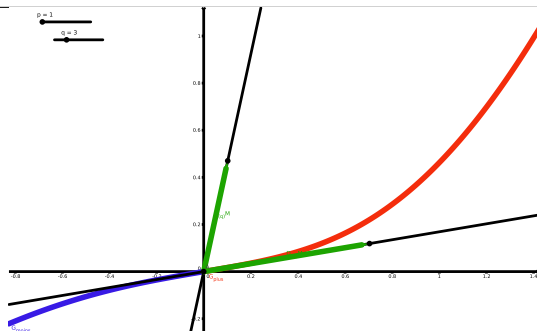
$$\overrightarrow{OM}(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \overrightarrow{OM}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{T} + \vec{o}((t-t_0)^p) \vec{T} + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{R} + \vec{o}((t-t_0)^q)$$



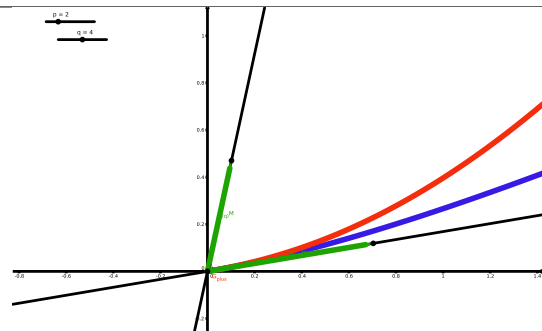
Cas p impair, q pair :
point ordinaire ($p = 1, q = 2$: point régulier)



Cas p pair, q impair :
point de rebroussement de 1ère espèce



Cas p impair, q impair :
point d'inflexion



Cas p pair, q pair :
point de rebroussement de 2ème espèce

V.2 Branches infinies d'une courbe planes

Soient I un intervalle réel, Γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ par $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, et t_0 un point de I ou une borne (éventuellement infinie) de I .

Proposition 11 (branches infinies).

C'est le cas lorsque la limite suivante existe : $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\| = +\infty$

1. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \ell$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = +\infty$, alors

Γ admet pour asymptote horizontale au voisinage de t_0 la droite d'équation $y = \ell$.

2. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \ell$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = +\infty$, alors

Γ admet pour asymptote verticale au voisinage de t_0 la droite d'équation $x = \ell$.

3. S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que les limites suivantes existent :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - \alpha x(t) = \beta, \text{ alors}$$

Γ admet pour asymptote au voisinage de t_0 la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$.

4. Si les limites suivantes $\lim_{t \rightarrow t_0} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |y(t)| = +\infty$ existent et si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, alors

Γ admet pour une branche parabolique au voisinage de t_0 dans la direction $(0y)$.

5. Si les limites suivantes $\lim_{t \rightarrow t_0} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |y(t)| = +\infty$ existent et si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - \alpha x(t)$ est infinie, alors

Γ admet pour une branche parabolique au voisinage de t_0 dans la direction la droite d'équation $y = \alpha x$.

VI. Plan tangent à une surface

VI.1 Introduction : paramétrisation d'une surface

Une surface peut être donnée par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

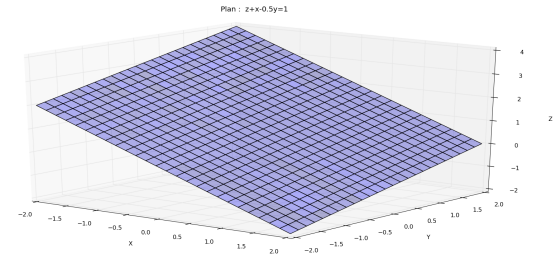
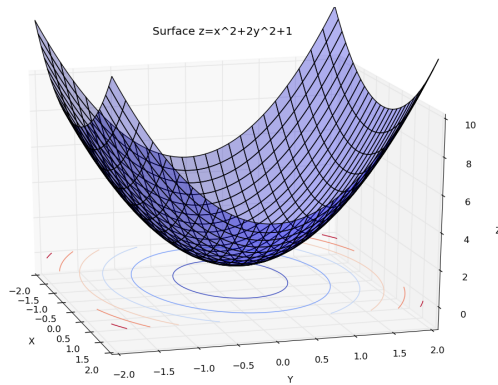
Par exemple, la sphère de centre O et de rayon 1 est paramétrée par $(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Une équation cartésienne est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On parle également de surface paramétrée pour un ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétré par

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On parle de surface paramétrée en cartésiennes pour un ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétré par $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$, où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Par exemple, le parabolôide de révolution de sommet 0 et d'axe (Oz) est paramétrée par $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$. Une équation cartésienne de cette ensemble est $z = g(x, y)$.



VI.2 Point régulier

Définition 12.

Etant donnée S une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0, z_0)$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Remarque 9. En d'autres termes, M est régulier si et seulement si $f(M) = 0$ et $\nabla f(M) \neq \vec{0}$.

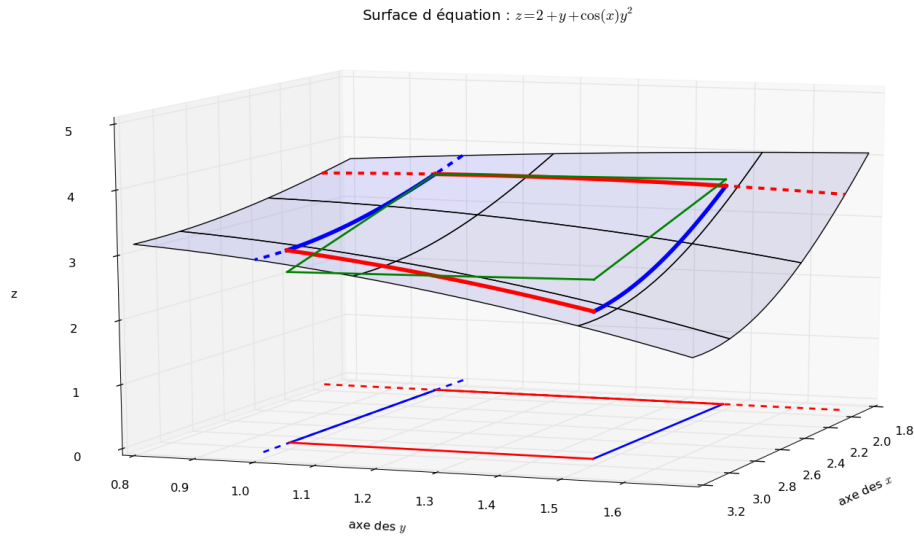
Remarque 10. On admet que toute surface de l'espace suffisamment « lisse » peut être définie par une telle équation.

VI.3 Plan tangent

Définition 13 (Plan tangent à une surface).

Si S est une surface de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan contenant M_0 et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{Grad } f}_{M_0}$.

Remarque 11. Si S est une surface de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan qui approche le mieux la surface au voisinage de M_0 .



Remarque 12. Par application de la règle de la chaîne à $0 = f(\varphi(u, v))$, on obtient que

$\text{Grad } \vec{f}_{M_0} \perp \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}$ et $\text{Grad } \vec{f}_{M_0} \perp \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$: lorsque la famille $(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v})$ est libre, elle dirige le plan tangent.

Proposition 12.

Si $\mathcal{S}$ est une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

démonstration : meilleure approximation locale donnée par le DL1 :

$$0 = 0 - 0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(M)$$

Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond au plan tangent.

exemple 9. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$: le plan tangent en $(1, 2, 0)$ a pour équation $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 + (z - 0) \times 0 = 0$.

Proposition 13.

Cas particulier : $z = f(x, y)$.

le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

L'objectif de ce chapitre est double :

- généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;
- formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Dérivabilité en un point.
Dérivabilité sur un intervalle.

Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un.
Interprétations géométrique et cinématique.
 $\Leftrightarrow$ PC : vecteur vitesse.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.
Dérivée de $L \circ f$, $B(f, g)$, $f \circ \varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.

Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\Leftrightarrow$ PC : vecteur accélération.
Brève extension des résultats du paragraphe précédent.

c) Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
Point régulier, tangente en un point régulier.
Construction d'arcs plans.

L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme.
 $\Leftrightarrow$ I : visualisation à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.