

## Table des matières

|                                                                                               |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Régularité des fonctions de <math>\mathbb{R}</math> vers <math>\mathbb{R}^n</math>.</b> | <b>2</b>  |
| I.1 Dérivabilité . . . . .                                                                    | 2         |
| I.2 Les espaces $\mathcal{C}^k$ . . . . .                                                     | 2         |
| <b>II. Arcs paramétrés</b>                                                                    | <b>3</b>  |
| II.1 Définitions . . . . .                                                                    | 3         |
| II.2 Paramétrisations régulières . . . . .                                                    | 4         |
| II.3 Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$ . . . . .                          | 5         |
| <b>III. Compléments sur la dérivation</b>                                                     | <b>6</b>  |
| III.1 Dérivation et linéarité . . . . .                                                       | 6         |
| III.2 Dérivation et linéarité . . . . .                                                       | 6         |
| III.3 Dérivation et composée . . . . .                                                        | 6         |
| <b>IV. Tangente à une courbe plane</b>                                                        | <b>7</b>  |
| IV.1 Point régulier . . . . .                                                                 | 7         |
| IV.2 Tangente à une courbe plane donnée par son équation cartésienne . . . . .                | 7         |
| <b>V. Plan tangent à une surface</b>                                                          | <b>9</b>  |
| V.1 Introduction : paramétrisation d'une surface . . . . .                                    | 9         |
| V.2 Point régulier . . . . .                                                                  | 9         |
| V.3 Plan tangent . . . . .                                                                    | 9         |
| <b>VI. Etude locale d'une courbe plane : HP</b>                                               | <b>11</b> |
| VI.1 Développement limité vectoriel . . . . .                                                 | 11        |
| VI.2 Branches infinies d'une courbe planes . . . . .                                          | 12        |

## Pré-requis

## Objectifs

# I. Régularité des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$ .

## I.1 Dérivabilité

### Définition 1.

Soit  $I$  un intervalle réel.

Une application  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite **dérivable** en  $a \in I$  si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (\vec{f}(x) - \vec{f}(a)) = \ell$$

Si tel est le cas, on note  $\vec{f}'(a)$  ou  $\frac{d}{dt} \vec{f}(a)$  la valeur de cette limite, et on l'appelle **vecteur vitesse** de  $\vec{f}$  en  $a$ .

### Proposition 1 ( DL1 vectoriel ).

Si  $\vec{f}$  est dérivable en  $a$ , alors :

$$\vec{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \vec{f}(a) + h \vec{f}'(a) + \vec{o}(h)$$

démonstration : cas  $n = 2$  :

On sait que  $x(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} x(a) + hx'(a) + o(h)$  et  $y(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} y(a) + hy'(a) + o(h)$ ,

donc vectoriellement :  $\begin{pmatrix} x(a+h) \\ y(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \vec{o}(h) \quad \square$

Remarque 1. Toute fonction dérivable est continue.

Remarque 2. Une fonction est dérivable ssi elle admet un DL1.

### Proposition 2.

Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.

démonstration : par linéarité de la dérivation des composantes.

## I.2 Les espaces $\mathcal{C}^k$

### Définition 2.

Une application  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite **de classe  $\mathcal{C}^k$**  en  $a \in I$  les fonctions  $\vec{f}, \vec{f}', \dots, \vec{f}^{(k-1)}$  sont dérivables en  $a$  et si  $\vec{f}^{(k)}$  est continue en  $a$ .

### Proposition 3.

Toute combinaison linéaire de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

On note  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  en tout point de  $I$ .

Remarque 3.  $\vec{f}''(a)$  est le vecteur accélération :

$$\vec{f}(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \vec{f}(a) + h \vec{f}'(a) + \frac{h^2}{2} \vec{f}''(a) + \vec{o}(h^2)$$

On note  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k$ .

## II. Arcs paramétrés

Cadre :  $E = \mathbb{R}^2$  (resp.  $E = \mathbb{R}^3$ ) muni du repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  (resp.  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ).

On pourra identifier (abusivement) les vecteurs de  $E$  à leurs vecteurs de  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui les représentent dans la base canonique (resp.  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ).

### II.1 Définitions

#### Définition 3.

On appelle **arc paramétré** toute application  $\gamma : I \longrightarrow E$  continue, avec  $I$  intervalle réel.

*Remarque 4.* On appelle **courbe paramétrée** (continument) tout ensemble  $\Gamma$  de points de  $E$  tel qu'il existe  $I$  un intervalle réel, et  $\gamma : I \rightarrow E$  continue tels que :

$$\Gamma = \{\gamma(t); t \in I\}$$

On dit aussi que  $\gamma$  est une **paramétrisation** (continue) de  $\Gamma$ .

**exemple 1.** Dans l'espace, l'arc paramétré  $F : [0, 9\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \longmapsto (t \cos(t), t \sin(t))$  a pour graphe :



**exemple 2.** Dans le plan, la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(1, -2)$  et dirigée par  $\vec{d}(3, 4)$  peut être paramétrée par  $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \longmapsto (1 + 3t, -2 + 4t)$

**exemple 3.** Dans l'espace, la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(1, 0, -2)$  et dirigée par  $\vec{d}(3, 4, 5)$  correspond à l'arc paramétré  $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \longmapsto (1 + 3t, -4t, -2 + 5t)$

*Remarque 5.* Interprétation : tout arc paramétré correspond à la trajectoire d'un mobile : **cinématique**

#### Définition 4.

On appelle **arc plan** toute application  $F : I \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ ,  $t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  continue.

On dit alors que  $F$  est une paramétrisation de  $\Gamma = \{F(t), t \in I\}$ .

#### Définition 5.

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow E$  est dit de **classe  $\mathcal{C}^k$**  si  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

On dit alors que  $\gamma$  est une paramétrisation de classe  $\mathcal{C}^k$  de la courbe  $\Gamma = \gamma(I)$

## II.2 Paramétrisations régulières

### Définition 6.

Un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est dit **régulier** si  $\gamma' : I \rightarrow E$  ne s'annule pas sur  $I$ .

### Définition 7.

Soit  $\gamma : I \rightarrow E$  un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $t_0$  de  $I$ , le **vecteur vitesse** à l'instant  $t_0$  est le vecteur  $\vec{\gamma}'(t_0)$ .

**Notation :** Le vecteur vitesse  $\vec{\gamma}'(t_0)$  à l'instant  $t_0$  peut également être noté  $D\gamma(t_0)$ . On a  $\vec{\gamma}'(t_0) = D\gamma(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)]$

Il s'identifie au vecteur colonne  $\overrightarrow{Grad(\gamma)}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) \\ \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \\ \frac{d\gamma_3}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$  qui est appelé (vecteur) **gradient** en  $t_0$  de  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ .

### Définition 8.

Soit  $\gamma : I \rightarrow E$  est un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $t_0$  de  $I$ , la **tangente** à la courbe au point de paramètre  $t_0$  est la droite passant par le point  $\gamma(t_0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{\gamma}'(t_0)$

**exemple 4.** Pour la courbe paramétrée par

$F : [0, 9\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t))$ , la tangente au point de paramètre  $t_0$  passe par le point  $(t_0 \cos(t_0), t_0 \sin(t_0))$  et est dirigée par le vecteur  $(\cos(t_0) - t_0 \sin(t_0), \sin(t_0) + t_0 \cos(t_0))$

Pout  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ , c'est la droite passant par le point  $A(0, \frac{\pi}{2})$  et dirigée par le vecteur  $\vec{t}(-\frac{\pi}{2}, 1)$ .

Elle a pour équation cartésienne  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$ , pour  $M(x, y)$ , soit

$$y - \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{2}x = 0$$



### Proposition 4 (D.L.1).

Soit  $\gamma : I \rightarrow E$  est un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . Au voisinage de  $t_0$  dans  $I$ , on a :

$$\gamma(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \gamma(t_0) + (t - t_0) \gamma'(t_0) + \vec{o}((t - t_0))$$

ou encore

$$\gamma(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \gamma(t_0) + h \gamma'(t_0) + \vec{o}(h)$$

**Définition 9.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow E$  un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour tout  $t_0 \in I$ , le vecteur accélération à l'instant  $t_0$  est le vecteur  $\vec{\gamma}''(t_0)$ .

## II.3 Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$

Etant donné l'expression de  $(x(t), y(t))$  :

1. On détermine l'ensemble de définition  $\Delta$  commun de  $x$  et  $y$ .
2. En cas de périodicité commune de  $x$  et  $y$ , on se contente de faire l'étude sur un intervalle  $\Delta_2$  de longueur  $T$  si  $x$  et  $y$  sont  $T$ -périodiques.
3. Parfois, on peut trouver des symétries, par exemple si  $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$ , il y a une symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ , et on peut réduire l'étude à  $\Delta_2 \cap [0, +\infty[$  etc...
4. On détermine les points réguliers.
5. On dresse un grand tableau de variations avec dans cet ordre  $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$

Lorsque  $x'(t)$  s'annule en un point régulier, la tangente est verticale. Lorsque  $y'(t)$  s'annule en un point régulier, la tangente est horizontale.

6. On trace l'arc paramétré.

H.P. *N.B.* : Lorsqu'au voisinage d'une valeur  $t_0$  finie ou infinie il y a des limites infinies, ou si le point de paramètre  $t_0$  n'est pas régulier, on tente une interprétation géométrique (asymptote pour des limites infinies, D.L. et tangente sinon).

Ces techniques ne sont pas exigibles des étudiants PC.

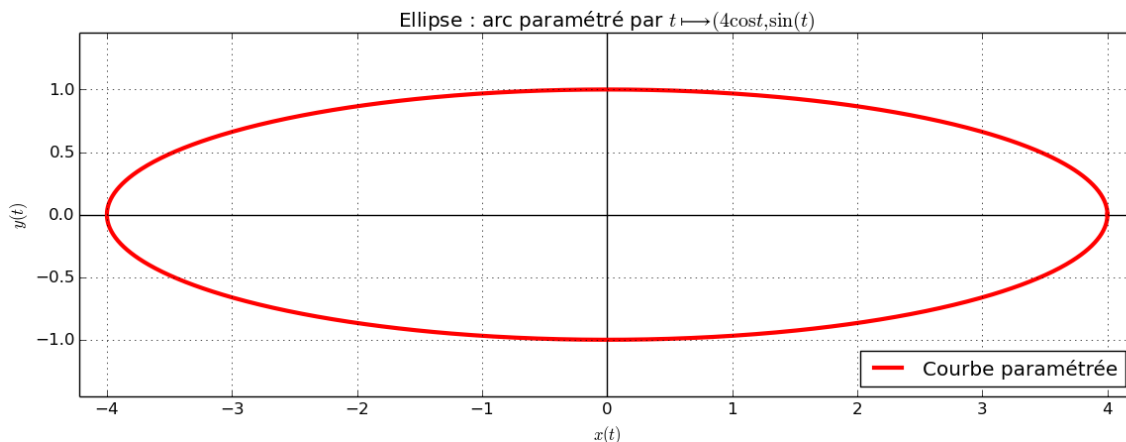
exemple :  $M(t) = (x(t), y(t)) = (4 \cos t, \sin t)$

1.  $\Delta = \mathbb{R}$ .  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Par  $2\pi$ -périodicité de  $x$  et  $y$ , il suffit d'étudier la courbe sur  $\Delta_2 = [-\pi, \pi]$ . Les points obtenus sont parcourus une infinité de fois ( $M(t + 2k\pi) = M(t), \forall k \in \mathbb{Z}$ )
3. Pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$ . On peut donc étudier la courbe sur  $\Delta_3 = [0, \pi]$  et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ .  
Pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $\pi - t \in [\pi/2, \pi]$ , et  
 $(x(\pi - t), y(\pi - t)) = (-x(t), y(t))$ . On peut donc étudier la courbe sur  $\Delta_4 = [0, \pi/2]$  et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .
4. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(x'(t), y'(t)) = (-4 \sin t, \cos t) \neq (0, 0)$   
Donc tous les points sont réguliers.

5.

|         |   |            |                 |
|---------|---|------------|-----------------|
| $t$     | 0 |            | $\frac{\pi}{2}$ |
| $x'(t)$ | 0 | +          | -4              |
| $x(t)$  | 4 | $\searrow$ | 0               |
| $y(t)$  | 0 | $\nearrow$ | 1               |
| $y'(t)$ | 1 | +          | 0               |

6. On remarque que pour  $t = 0$  la tangente est verticale, pour  $t = \pi/2$  la tangente est horizontale



### III. Compléments sur la dérivation

#### III.1 Dérivation et linéarité

##### Proposition 5.

Soient  $E$  euclidien,  $f : I \rightarrow E$  dérivable, et  $L \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors  $L \circ f : I \rightarrow E$  est dérivable sur  $I$ , et :

$$\forall t \in I, (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

démonstration :  $\frac{1}{h}(L \circ f(t+h) - L \circ f(t)) \underset{lin}{=} L \left( \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} L(f'(t))$

car toute application linéaire est continue et car  $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$   $\square$

#### III.2 Dérivation et linéarité

##### Proposition 6.

Soient  $E, F$  euclidien,  $f, g : I \rightarrow E$  dérivable, et  $B : E \times E \rightarrow F$  une application bilinéaire.

Alors  $B(f, g) : I \rightarrow F$ ,  $t \mapsto B(f(t), g(t))$  est dérivable sur  $I$ , et :

$$\forall t \in I, (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

démonstration :  $\frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) = \frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t+h))) + \frac{1}{h}(B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t)))$   
 $\underset{bilin}{=} B\left(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), g(t+h)\right) + B\left(f(t), \frac{1}{h}(g(t+h) - g(t))\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

car toute application bilinéaire est continue et car  $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$  et  $\frac{1}{h}(g(t+h) - g(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(t)$ .  $\square$

**exemple 5** (Produit scalaire).

Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , alors  $t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle$  est dérivable de dérivée  $t \mapsto \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle = 2 \langle f'(t) | g(t) \rangle$

**exemple 6** (Trajectoire orthoradiale).

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est tel que :  $\forall t \in I, f(t) \perp f'(t)$ , alors  $t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t) | f(t) \rangle$  est constante : le mouvement est circulaire!

**exemple 7.** Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , alors  $t \mapsto \det(f(t), g(t))$  est dérivable de dérivée  $t \mapsto \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$

#### III.3 Dérivation et composée

##### Proposition 7.

Soient  $I, J$  deux intervalles réels,  $E$  euclidien,  $\vec{f} : I \rightarrow E$  dérivable et  $\varphi : J \rightarrow I$  dérivable.

Alors  $\vec{f} \circ \varphi : J \rightarrow E$ ,  $t \mapsto \vec{f}(\varphi(t))$  est dérivable sur  $J$ , et :

$$\forall s \in J, (\vec{f}(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s) \vec{f}'(\varphi(s))$$

démonstration :  
 $\frac{1}{h}(\vec{f} \circ \varphi(t+h) - \vec{f} \circ \varphi(t)) \underset{DL1}{=} \frac{1}{h}(\vec{f}(\varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)))$   
 $\underset{DL1}{=} \frac{1}{h}(\vec{f}(\varphi(t)) + (h\varphi'(t) + o(h))\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)))$   
 $= \frac{1}{h}((h\varphi'(t) + o(h))\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)))$   
 $= \varphi'(t)\vec{f}'(\varphi(t)) + o(1)\vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(\varphi'(t) + o(1)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi'(t)\vec{f}'(\varphi(t))$   $\square$

*Remarque 6.* En physique on peut changer d'échelle de temps.

## IV. Tangente à une courbe plane

### IV.1 Point régulier

#### Définition 10.

Etant donnée  $\mathcal{C}$  est une courbe d'équation cartésienne  $f(x, y) = 0$ , avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on appelle **point régulier** tout point  $M = (x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et tel que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$ .  
On dit que  $M$  est un **point critique** sinon.

*Remarque 7.* En d'autre termes,  $M$  est régulier si et seulement si  $f(M) = 0$  et  $\nabla f(M) \neq \vec{0}$ .

*Remarque 8.* On admet que toute courbe du plan suffisamment « lisse » peut être définie par une telle équation.

#### Définition 11 (Tangente à une courbe paramétrée).

Si  $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)); t \in I\}$  est une courbe de l'espace paramétrée par  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , la tangente à la courbe en un point  $M_0 = \gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  est la droite passant par  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $\gamma'(t_0)$ .

### IV.2 Tangente à une courbe plane donnée par son équation cartésienne

#### Définition 12.

Etant donnée  $\mathcal{C}$  une courbe d'équation cartésienne  $f(x, y) = 0$ , avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on appelle **point régulier** tout point  $M = (x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M)\right) \neq (0, 0).$$

On appelle **point singulier** tout point  $M = (x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M)\right) = (0, 0).$$

#### Proposition 8.

Si  $\mathcal{C}$  est une courbe plane d'équation cartésienne  $g(x, y) = 0$ , pour  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ , alors la **tangente**  $\mathcal{T}_M$  à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $M$  est la droite passant par  $M$  et orthogonale au vecteur  $\overrightarrow{\text{Grad}} g_M$ .

démonstration :

on paramètre  $\mathcal{C}$  par  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Pour tout  $t \in I$ , on a  $g(\gamma(t)) = 0$ , donc d'après la règle de la chaîne,

$$0 = \frac{d}{dt}(g(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

ou encore :

$$\overrightarrow{\text{Grad}} g_{\gamma(t)} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point  $M$  de coordonnées  $(x(t_0), y(t_0))$  est la droite passant par  $M$  et dirigée par le vecteur « vitesse »  $(x'(t_0), y'(t_0))$ .  $\square$

*Remarque 9.* Une équation cartésienne de la tangente en  $M$  est donc  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad } g_{\gamma(t)}} = 0$ , soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

**Proposition 9.**

Si  $\mathcal{C}$  est une courbe d'équation cartésienne  $f(x, y) = 0$ , la tangente à la courbe au point régulier  $M_0(x_0, y_0)$  est la droite d'équation cartésienne :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

*démonstration :*

on paramètre  $\mathcal{C}$  par  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Pour tout  $t \in I$ , on a  $g(\gamma(t)) = 0$ , donc d'après la règle de la chaîne,

$$0 = \frac{d}{dt}(g(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

ou encore :

$$\overrightarrow{\text{Grad } g_{\gamma(t)}} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point  $M$  de coordonnées  $(x(t_0), y(t_0))$  est la droite passant par  $M$  et dirigée par le vecteur « vitesse »  $(x'(t_0), y'(t_0))$ .  $\square$

Une équation cartésienne de la tangente en  $M$  est donc  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad } g_{\gamma(t)}} = 0$ , soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

$\square$

*interprétation :* meilleure approximation locale donnée par le DL1 :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond à la tangente.

**exemple 8.**  $x^2 + y^2 = 5$  : la tangente au point  $(1, 2)$  a pour équation  $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 = 0$ .



## V. Plan tangent à une surface

### V.1 Introduction : paramétrisation d'une surface

Une surface peut être donnée par une équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ .

Par exemple, la sphère de centre  $O$  et de rayon 1 est paramétrée par  $(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi))$

Une équation cartésienne est  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

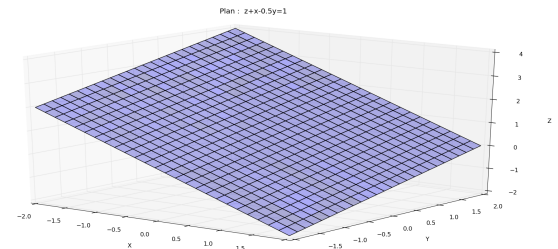
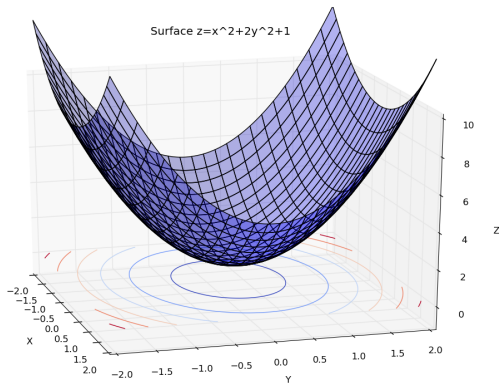
On parle également de surface paramétrée pour un ensemble de points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  paramétré par

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On parle de surface paramétrée en cartésiennes pour un ensemble de points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  paramétré par  $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$ , où  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Par exemple, le paraboloïde de révolution de sommet 0 et d'axe (Oz) est paramétrée par  $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$ .

Une équation cartésienne de cette ensemble est  $z = g(x, y)$ .



### V.2 Point régulier

#### Définition 13.

Etant donnée  $S$  une surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ , avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , on appelle **point régulier** tout point  $M = (x_0, y_0, z_0)$  tel que  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$  et tel que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) \neq (0, 0, 0).$$

*Remarque 10.* En d'autre termes,  $M$  est régulier si et seulement si  $f(M) = 0$  et  $\nabla f(M) \neq \vec{0}$ .

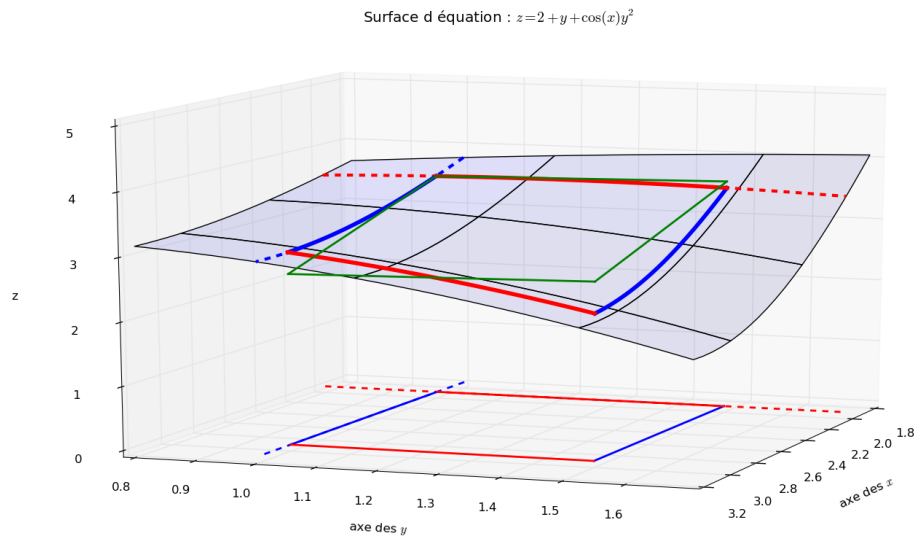
*Remarque 11.* On admet que toute surface de l'espace suffisamment « lisse » peut être définie par une telle équation.

### V.3 Plan tangent

#### Définition 14 (Plan tangent à une surface).

Si  $S$  est une surface de l'espace d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , le plan tangent à la surface en  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  est le plan contenant  $M_0$  et orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{\text{Grad } f}_{M_0}$ .

*Remarque 12.* Si  $S$  est une surface de l'espace d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , le plan tangent à la surface en  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  est le plan qui approche le mieux la surface au voisinage de  $M_0$ .



*Remarque 13.* Par application de la règle de la chaîne à  $0 = f(\varphi(u, v))$ , on obtient que

$\overrightarrow{\text{Grad}} f_{M_0} \perp \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}$  et  $\overrightarrow{\text{Grad}} f_{M_0} \perp \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$  : lorsque la famille  $(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v})$  est libre, elle dirige le plan tangent.

#### Proposition 10.

Si  $\mathcal{S}$  est une surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ , le plan tangent à la surface au point régulier  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  est le plan d'équation cartésienne :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

*démonstration* : meilleure approximation locale donnée par le DL1 :

$$0 = 0 - 0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(M)$$

Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond au plan tangent.

**exemple 9.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  : le plan tangent en  $(1, 2, 0)$  a pour équation  $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 + (z - 0) \times 0 = 0$ .

#### Proposition 11.

Cas particulier :  $z = f(x, y)$ .

le plan tangent à la surface au point régulier  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

## VI. Etude locale d'une courbe plane : HP

### VI.1 Développement limité vectoriel

#### Théorème 12 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soit  $\vec{\gamma} : I \rightarrow E$  est un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous  $t$  et  $t_0$  dans  $I$ , on a :

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \vec{\gamma}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{(t-u)^n}{n!} \vec{\gamma}^{(n+1)}(u) du$$

#### Théorème 13 (Formule de Taylor-Young).

Soit  $\vec{\gamma} : I \rightarrow E$  est un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous  $t$  et  $t_0$  dans  $I$ , on a :

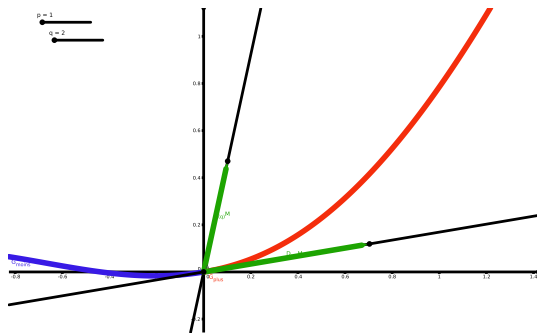
$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \vec{\gamma}^{(k)}(t_0) + \vec{r}(t), \text{ avec } \vec{r}(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \vec{o}((t-t_0)^n)$$

Soient  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrée par  $\vec{OM} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $t_0 \in I$  et  $(p, q) \in \mathbb{N}$  le couple d'entiers tel que :

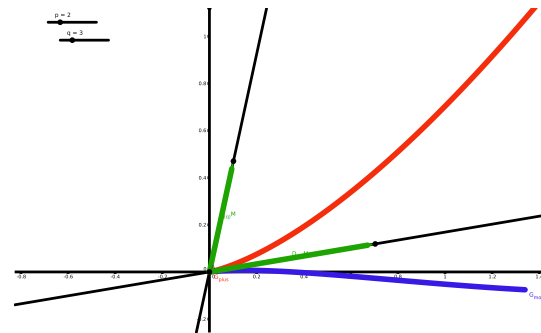
$p$  est le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $\vec{OM}^{(k)}(t_0)$  est non nul. On note  $\vec{T} = \vec{OM}^{(p)}(t_0)$ .

$q$  est le plus petit entier  $\ell \geq p+1$  tel que pour  $\vec{R} = \vec{OM}^{(q)}(t_0)$ , la famille  $(\vec{T}, \vec{R})$  est libre. On a donc  $1 \leq p < p+1 \leq q$

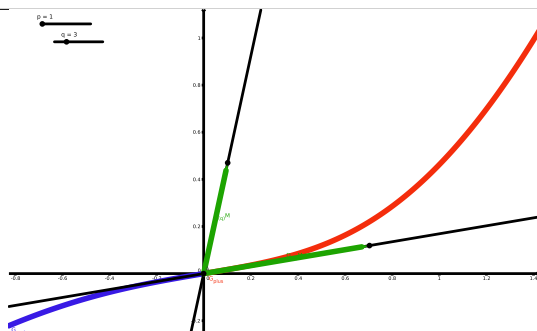
$$\vec{OM}(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \vec{OM}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{T} + \vec{o}((t-t_0)^p) \vec{T} + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{R} + \vec{o}((t-t_0)^q)$$



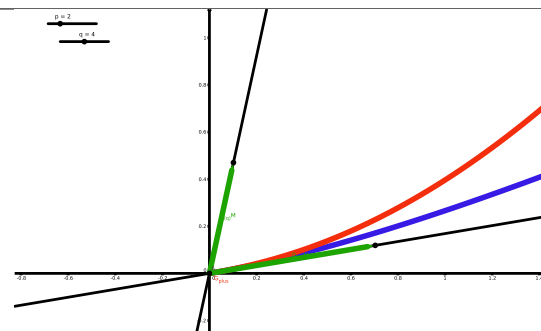
Cas  $p$  impair,  $q$  pair :  
point ordinaire (  $p = 1, q = 2$  : point régulier )



Cas  $p$  pair,  $q$  impair :  
point de rebroussement de 1ère espèce



Cas  $p$  impair,  $q$  impair :  
point d'inflexion



Cas  $p$  pair,  $q$  pair :  
point de rebroussement de 2ème espèce

## VI.2 Branches infinies d'une courbe planes

Soient  $I$  un intervalle réel,  $\Gamma$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  par  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , et  $t_0$  un point de  $I$  ou une borne (éventuellement infinie) de  $I$ .

### Proposition 14 (branches infinies).

C'est le cas lorsque la limite suivante existe :  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\| = +\infty$

1. S'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \ell$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = +\infty$ , alors

$\Gamma$  admet pour asymptote horizontale au voisinage de  $t_0$  la droite d'équation  $y = \ell$ .

2. S'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \ell$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = +\infty$ , alors

$\Gamma$  admet pour asymptote verticale au voisinage de  $t_0$  la droite d'équation  $x = \ell$ .

3. S'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que les limites suivantes existent :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - \alpha x(t) = \beta, \text{ alors}$$

$\Gamma$  admet pour asymptote au voisinage de  $t_0$  la droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$ .

4. Si les limites suivantes  $\lim_{t \rightarrow t_0} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |y(t)| = +\infty$  existent et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ , alors

$\Gamma$  admet pour une branche parabolique au voisinage de  $t_0$  dans la direction  $(0y)$ .

5. Si les limites suivantes  $\lim_{t \rightarrow t_0} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow t_0} |y(t)| = +\infty$  existent et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - \alpha x(t)$  est infinie, alors

$\Gamma$  admet pour une branche parabolique au voisinage de  $t_0$  dans la direction la droite d'équation  $y = \alpha x$ .

## Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

L'objectif de ce chapitre est double :

- généraliser aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles;
- formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Dérivabilité en un point.  
Dérivabilité sur un intervalle.

Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un.  
Interprétations géométrique et cinématique.  
 $\Leftrightarrow$  PC : vecteur vitesse.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.  
Dérivée de  $L \circ f$ ,  $B(f, g)$ ,  $f \circ \varphi$  où  $f$  et  $g$  sont dérivables et à valeurs vectorielles,  $L$  est linéaire,  $B$  est bilinéaire,  $\varphi$  est dérivable et à valeurs réelles.

Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de  $\mathbb{R}^2$  de deux fonctions vectorielles.

#### b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle.  
Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

$\Leftrightarrow$  PC : vecteur accélération.  
Brève extension des résultats du paragraphe précédent.

#### c) Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
Point régulier, tangente en un point régulier.  
Construction d'arcs plans.

L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme.  
 $\Leftrightarrow$  I : visualisation à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.