Chapitre 20 : Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définition et exemples

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On la note $\sum u_n$.

Exemple : en poursuivant avec les notations de la définition, donner les premiers termes de $\sum u_n$:

Définition

Les termes de $\sum u_n$ s'appellent **sommes partielles** de la série

Remarques :

— une somme partielle la somme d'un nombre fini de termes.

— Attention à la numérotation : si $p \in \mathbb{N}^*$, la $p^{\text{ème}}$ somme partielle de $\sum u_n$ est

Définition

- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles converge.
- Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.
- Décider la **nature d'une série** c'est décider si elle est convergente ou divergente ; c'est l'objectif principal de l'étude des séries.
- Lorsque la série converge, sa limite est appelée **somme** et on la note
- Lorsque la série converge, le **reste partiel d'ordre** n est

1.2 Lien entre suites et séries, objectif de l'étude des séries

Le lien entre suites et séries est très profond.

— D'une part, par définition, <u>une série est une suite</u>. Alors, pourquoi un chapitre dédié aux séries ? Ne peut-on simplement pas appliquer les résultats vus sur les suites ?

La réponse est non. Les séries sont des objets qui apparaissent naturellement et pour lesquels on va chercher des propriétés spécifiques qu'on obtiendra, pour partie seulement, des résultats vus sur les suites.

Lorsqu'on s'intéresse à une série $\sum u_n$, la question principale est celle de sa nature : $\sum u_n$ converge-t-elle ? Dans ce chapitre, on va dégager des règles générales pour répondre à cette question.
Quand $\sum u_n$ converge, on peut chercher la valeur de sa somme, mais il n'existe pas de règle générale, ce sera du cas par cas.

— D'autre part, si l'on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut reconstruire la suite à partir de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

On pourra donc envisager les séries comme un outil pour étudier les suites.

L'étude des séries sera poursuivie l'an prochain, il est donc important de bien comprendre ce chapitre. On indiquera, en guise de remarques, les directions qui seront explorées dans le cours de seconde année.

1.3 Exemples de référence

1.3.1 Série géométrique

Définition
Une **série géométrique** est une série de la forme

Exemples :

Proposition
Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum \gamma^n$ converge si, et seulement si,

Sa somme est alors

Démonstration
Si $\gamma = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma^k = n + 1$ qui diverge vers $+\infty$.

Sinon, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma^k =$ qui converge si, et seulement si, γ^{n+1} converge, ce qui équivaut à $|\gamma| < 1$.

Dans ce cas, $\gamma^{n+1} \to 0$ et la somme de la série vaut $\dfrac{1}{1-\gamma}$. ■

1.3.2 Série harmonique

Définition
On appelle **série harmonique** la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Remarque : la plus petite valeur prise par n est 1.

Exemple : les premiers termes de la série harmonique sont

Proposition
La série harmonique

Démonstration
On a, pour tout $k \geq 1$, $\displaystyle\int \qquad \leq \frac{1}{k}$: $(\star)$ il suit que $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\int \qquad \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \iff$

On conclut donc

Exercice
a) Dans la démonstration précédente, au niveau de $(\star)$, proposer un encadrement de $\frac{1}{k}$.
b) En déduire un équivalent des sommes partielles de la série harmonique.

Réponse
On a :

1.3.3 Série harmonique alternée

Définition
On appelle **série harmonique alternée** la série $\sum$

Exemple : les premiers termes de la série harmonique alternée sont

Proposition
La série harmonique alternée converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

Remarques :

a) la démonstration de cette propriété sera vue en TD.
b) l'idée à comprendre est que si $\frac{1}{n}$ ne converge pas assez vite vers 0 pour que $\sum \frac{1}{n}$ converge, l'alternance des signes de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ crée des phénomènes de compensation qui permettent la convergence de la série. Ceci sera prolongé l'an prochain avec le *critère spécial des séries alternées*.

1.3.4 Série exponentielle

Proposition
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{zx} \end{array} \right.$.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = z^k f(x)$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(1) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\ \mathrm{d}x$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq$

Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

1.3.5 Un exemple de série téléscopique

Exercice
Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Réponse
On a :

1.4 Premières propriétés

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition
On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : ce résultat est intuitif car la nature de $\sum u_n$ est liée au comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes.

Démonstration
Supposons que l'on modifie un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Si l'on n'a modifié aucun terme alors les suites sont égales, les séries aussi et le résultat est évident.

— Sinon, soit $N = \max\{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq v_n\}$. Par définition, $N \in \mathbb{N}$. On a, pour tout entier $n > N$:

$$\sum_{k=0}^{n} v_k =$$

Finalement, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature. ∎

Remarque : en particulier, la propriété précédente permet de passer facilement à des séries « qui ne partent pas de 0 », comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

Proposition
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est donc une **condition nécessaire** à la convergence de $\sum u_n$.

Ce n'est **pas une condition suffisante**, un contre-exemple :

Définition
Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemples :

a) $\sum n^2$ diverge grossièrement car

b) $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement car

c) $\sum n \sin(\frac{1}{n})$ diverge grossièrement car

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.

De plus, sa somme vaut :

Attention : on peut avoir $\sum u_n + v_n$ qui converge sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Par exemple :

Remarque : dans la propriété précédente, on a fait une combinaison linéaire. On peut reformuler la première partie de la propriété :

Proposition (Retour sur le lien entre suite et série)
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.

Remarque : cela correspond à des séries téléscopiques.

Morale de l'histoire (à ce stade)

- On cherche à quelles conditions sur u_n la série $\sum u_n$ converge ou diverge.
- Si la série converge, on peut chercher à calculer sa somme. Ce sera du cas par cas (et donc on en parlera peu).
- Une condition indispensable pour la convergence de la série est $u_n \to 0$ mais ça n'est pas suffisant. En gros, il y a deux questions à envisager :
  — $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend-elle assez vite vers 0 ?
  — Si (u_n) tend lentement vers 0, y a-t-il des phénomènes de compensation entre les termes qui permettent la convergence de la série ?

2 Séries à termes positifs (SATP)

Dans ce paragraphe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs ou nuls.

2.1 Pourquoi ce cas particulier des séries à termes positifs ?

Proposition
La suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet une limite qui vaut un réel ou bien $+\infty$.

Démonstration

■

Remarque : comme $(u_n)_n$ est positive, si $\sum u_n$ diverge c'est forcément vers $+\infty$; on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

Proposition
$\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration
La suite des sommes partielles d'une SATP est croissante ; elle converge si, et seulement si, elle est majorée.■

2.2 Propriétés des séries à termes positifs

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

i.

ii.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Démonstration
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$. Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$.

i. Si $\sum v_n$ converge, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et donc la série à termes positifs $\sum u_n$ est majorée ; on en déduit qu'elle converge.

ii. Si $\sum u_n$ diverge, c'est vers $+\infty$ ce qui implique que la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ n'est pas majorée et donc elle diverge vers $+\infty$.

Proposition
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Alors :

i. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

ii. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs.

Dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ c'est dire :

Exemple : $\displaystyle\sum \frac{2}{3n+1}$

Remarque : un « petit o » est un « grand O » ; un équivalent est aussi un « grand O », mais on a mieux :

Proposition (Travailler par équivalent sur le terme général pour décider la nature d'une SATP)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Démonstration
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} O(u_n)$. En utilisant la propriété précédente, on a alors le résultat.■

Exemple : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Remarques :

a) On a un outil efficace pour obtenir des équivalents :

b) **ATTENTION :** les séries doivent être à termes positifs.

2.3 Séries de Riemann

Proposition
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+)$, positive et monotone.
La série $\sum f(n)$ a même nature que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x$.

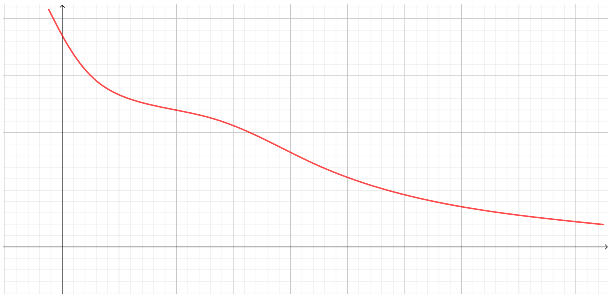
Démonstration
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+)$, positive et monotone.

— Si f est croissante et non-nulle alors $\sum f(n)$ diverge grossièrement vers $+\infty$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) > 0$. On a :

$$\forall n \geq n_0,\ \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_{n_0}^n f(x)\ \mathrm{d}x \geq f(n_0)(n-n_0)$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x = +\infty$ et donc la série et l'intégrale ont bien même nature.

— Si f est décroissante :



La série $\sum f(n)$ a donc la même nature que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème
Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$.

Démonstration

— Si $x \leq 1$ on a, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^x} \geq$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

— Si $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$ et donc

Remarques :

a) On savait que $\frac{1}{n}$ diverge et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ; le résultat précédent met en évidence le rôle de « frontière » joué par la série harmonique pour les séries de Riemann.

b) Les séries de Riemann sont souvent utilisées pour étudier les séries à termes positifs.

c) Lorsque $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$, c'est la **fonction ζ (zêta) de Riemann**.
Cette fonction a des applications très importantes, en particulier sur la répartition des nombres premiers (ce qui semble très éloigné de sa définition).

Remarque : ce paragraphe sur les séries à termes positifs est également valables pour les séries à termes négatifs ; en fait il est valable pour les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

Méthode (Décider la nature d'une série $\sum u_n$ à termes de signe constant)

1. on cherche un équivalent simple à u_n.
2. on compare cet équivalent à un exemple de référence (Riemann ou géométrique).
3. la série $\sum u_n$ a la même nature que celle de l'équivalent.
4. **ATTENTION :** si les séries convergent, il n'y a aucune raison pour que leurs sommes soient égales.

Mise en œuvre : exercices 2, 3 et 4.

3 Séries absolument convergentes

Définition
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque

Remarques :

a) on dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable**.

b) $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et on peut utiliser les résultats qu'on a vu.

Théorème
La convergence absolue implique la convergence.

Autrement dit :

Démonstration
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- Supposons que $\sum u_n$ soit une série réelle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n^+, u_n^- \leq |u_n|$ donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  On a également $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^-$ et donc $\sum u_n$ converge.

- Si $\sum u_n$ soit une série dont les termes sont complexes, en introduisant les parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas précédent et $\sum u_n$ converge.

ATTENTION :

Exemple :

Méthode (pour prouver qu'une série $\sum u_n$ converge en utilisant la convergence absolue)

1. on détermine le terme général $|u_n|$;
2. on détermine un équivalent simple de $|u_n|$ puis on le compare à une série de référence (souvent géométrique ou de Riemann) ;
3. si la série $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
4. **Attention :** si $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut rien dire pour $\sum u_n$.

Mise en œuvre : exercices 2 et 4.

Exemple : Montrer que $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$ converge.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série abolument convergente. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

$\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente et les sommes ont du sens.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ et on obtient le résultat en passant à la limite. ■

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série, $\sum v_n$ une série à termes positifs qui converge.
Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Attention : la positivité de $\sum v_n$ est indispensable. De façon générale, la comparaison asymptotique des termes généraux de deux séries ne sert que pour les séries à termes positifs.

Démonstration

$u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ signifie : $\exists M > 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M v_n$ et donc $|u_n| \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge aussi. ■

Exemple : étudions la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^{\frac{4}{3}} + \cos(n)}$.

Méthode (Pour étudier la nature de $\sum u_n$)

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
2. Sinon, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant, on peur procéder par équivalent pour la nature de $\sum u_n$ (mais ça ne dit rien sur l'éventuelle valeur de la somme).
3. Sinon, on peut regarder si $\sum |u_n|$ converge : cela impliquerait la convergence de $\sum u_n$.
4. Sinon, c'est du cas par cas.

Remarque : l'an prochain, de nouveaux outils seront créés dans le cours, de façon à décider rapidement la nature d'une série. Pour les séries à termes positifs, les comparaisons à des séries géométriques ainsi qu'à des séries de Riemann seront approfondies. Pour les séries dont les termes ne sont pas positifs, le concept de « série alternée » viendra généraliser le cas particulier de la série harmonique alternée.

Synthèse du chapitre

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels ou de complexes

— La **série de terme général** u_n est la suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$, ses termes sont appelés **sommes partielles**.

— Il y a donc deux suites en jeu : la suite $(u_n)_n$ et la série $\sum u_n$ qu'il ne faut pas confondre.

— L'objectif principal du chapitre est de décider la **nature de la série**, c'est-à-dire savoir si elle converge ou diverge.

— Quand la série converge, sa limite est appelée **somme de la série**.
On la note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et en général on ne cherche pas à la calculer.

— $\boxed{\text{Algorithme pour décider la nature d'une série } \sum u_n}$:

— Dans les exercices, si u_n est une **fraction rationnelle** :

1. On obtient facilement la nature de $\sum u_n$

2. Ensuite, une **décomposition en éléments simples** permet parfois de faire apparaître un téléscopage dans les sommes partielles et d'obtenir la somme de la série (si elle converge).

— Dans les exercices, si on demande à donner un équivalent des sommes partielles, il faut penser à **comparer le terme général à une intégrale**.