

Chapitre 5 : Vers les équations différentielles

1 Introduction

1.1 Désintégration d'éléments radioactifs

Considérons un stock de N noyaux radioactifs. Expérimentalement, on observe que pendant un temps Δt la variation de la quantité de noyaux sera de la forme :

$$\Delta N = -\lambda \times N \times \Delta t$$

où λ est une constante positive.

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$$

et, si on fait tendre Δt vers 0, on obtient :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Remarque : en faisant ce passage à des différences infinitésimales, on a fait l'hypothèse que N est une fonction dérivable (*cela vous semble-t-il raisonnable ?*).

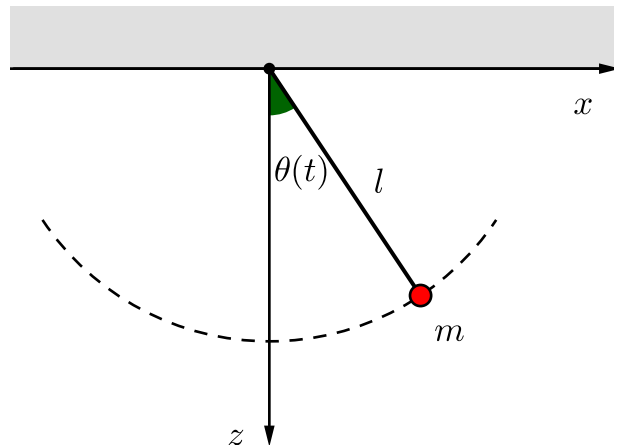
1.2 Oscillateur mécanique

On considère une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l .

Au temps $t = 0$, on lâche le pendule ainsi constitué depuis l'angle θ_0 et on observe un mouvement oscillant avec l'angle $\theta(t)$ qui varie.

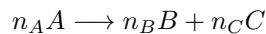
Si on néglige les frottements, en appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système on aboutit à l'équation suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$



1.3 Cinétique chimique

On considère une réaction chimique de la forme :



où n_A, n_B et n_C sont des nombres rationnels positifs appelés *coefficients stoechiométriques*.

La vitesse de réaction est définie par :

$$v = -\frac{1}{n_A} \frac{d[A]}{dt} = \frac{1}{n_B} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{n_C} \frac{d[C]}{dt}$$

Expérimentalement, on observe (souvent) une relation du type :

$$v = k \times [A]^n$$

où k est un coefficient qui dépend des conditions de réaction (notamment la température) et n est un rationnel qui est appelé *ordre de la réaction*

Si on cherche $[A]$ parmi les fonctions dérivables, on a alors l'équation :

$$-\frac{1}{n_A}[A]' = k[A]^n \iff [A]' = -n_A k[A]^n$$

Remarques :

- certaines réactions n'admettent pas de relation du type $v = k \times [A]^n$ et alors il n'y a pas d'ordre de réaction
- on s'intéressera particulièrement aux cas des relations d'ordre $n = 1$ et $n = 2$
- la définition de l'ordre d'une réaction donnée ici concerne les cas où il y a un seul réactif. Lorsqu'il y en a plusieurs, on a des ordres partiels (un par réactif) et l'ordre global est la somme des ordres partiels.

1.4 Vocabulaire des équations différentielles

Résoudre une équation différentielle c'est trouver une fonction qui vérifie une certaine relation avec ses dérivées. Il s'agit donc d'équations dont l'inconnue est une fonction que l'on notera y .

Si on reprend les exemples précédents :

- Désintégration d'éléments radioactifs :
- Oscillateur mécanique (non amorti) :
- Cinétique chimique :

On a une infinité d'équations différentielles possibles et, comme pour les équations numériques dont l'inconnue est un nombre, certaines sont simples, d'autres compliquées voire impossible à résoudre.

On classe ces équations en différents types, comme cela avait été le cas pour les équations numériques : polynômiales (sous-catégorisées selon le degré), rationnelles, etc...

Définition

L'**ordre d'une équation différentielle** est l'ordre de dérivation le plus important qui intervient dans l'équation.

Exemples :

- $y - 3y' + y^5 = 1$ est une équation différentielle d'ordre ...
- $y' + \ln(y) = y'' - t^2$ est une équation différentielle d'ordre ...
- Une équation différentielle d'ordre 1 :
- Une équation différentielle d'ordre 3 :

Définition

- i. Une équation différentielle d'ordre 1 est dite *linéaire* lorsqu'elle est de la forme :

$$y' + a(t)y = b(t)$$

Si $a(t)$ est une fonction constante, on dit que l'équation est à *coefficients constants*.

- ii. Une équation différentielle d'ordre 2 est dite *linéaire à coefficients constants* lorsqu'elle est de la forme :

Exemples :

- Une équation différentielle d'ordre 1, linéaire :
- Une équation différentielle d'ordre 1, linéaire à coefficients constants :

- Une équation différentielle d'ordre 1, non linéaire :
- Une équation différentielle d'ordre 2, linéaire à coefficients constants :

Remarques :

- Les fonctions y , a et b sont définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$. La variable réelle sera (le plus souvent) notée x ou t . Ces fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Certaines équations ont des solutions que l'on ne sait pas trouver de façon exacte, on a alors des résolutions approchées (notamment la méthode d'Euler qui sera vue).

Dans ce chapitre nous apprendrons à résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1. Un prochain chapitre sera dévolu aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

Objectif du chapitre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

avec a et b des fonctions : $I_{\text{intervalle}} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

2 Cas $a(x) = 0$: recherche de primitives

2.1 Calcul de Primitives

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I et qui vérifie $F' = f$.

Exemple : soit $f(x) = 2x$.

- Trouver une primitive de f .
- En trouver d'autres.

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On a l'alternative suivante :

- Soit f n'admet **aucune** primitive sur I .
- Soit f admet une primitive F et alors f en admet une **infinité** qui sont toutes de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Proposition

Résoudre l'équation différentielle $y' = b(x)$ consiste à trouver **toutes** les primitives de $b(x)$.

On a plusieurs méthodes pour calculer des primitives :

- faire "directement" le contraire d'une dérivée ;
- reconnaître la dérivée d'une fonction composée $g' \circ f \times f'$;
- on a un candidat qu'il faut tester.

Exemples :

- Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = 2x + 5$$

$$y' = t^2 + 2t - 3$$

$$y' = t^4 - 5t^7$$

$$y' = \cos x$$

$$y' = \sin x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

b) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = 2te^{t^2}$$

$$y' = \frac{2t+1}{t^2+t-5}$$

c) Dériver $f(x) = \frac{e^x}{x}$. En déduire les solutions de $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Exercice

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = x^2 + x - 1$.

Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient la condition $y(1) = 3$.

Réponse

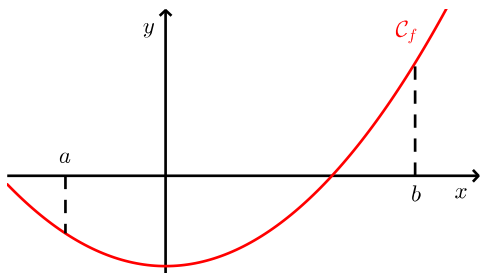
On a

2.2 Existence de primitives

Un chapitre complet sera dédié à l'intégration au second semestre. L'objet du paragraphe qui suit est de rappeler les "bases" de l'intégration et, dans cet esprit, on visera l'intuition plus que la rigueur.

2.2.1 Rappel sur l'intégration

L'idée qu'il faut avoir d'une intégrale est qu'il s'agit d'une surface *algébrique* : comptée positivement au-dessus de l'axe des abscisses, négativement en-dessous.



Remarque : si les bornes sont "dans le mauvais sens" on utilise la relation $\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$

2.2.2 Les intégrales pour les primitives : existence de primitives

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , soit $a \in I$.

La fonction définie $F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est définie et dérivable sur I . De plus, $F' = f$.

Remarques :

a) on peut même préciser que $F(x) = \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{cases}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

En effet :

b) Le théorème précédent stipule notamment que, si f est continue, alors f est intégrable (c'est intuitif) et f admet des primitives. **En exercice, lorsqu'on demande de justifier qu'une intégrale existe, la réponse est (presque toujours) que la fonction intégrée est continue.**

2.2.3 Les primitives pour les intégrales : calcul d'intégrales

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I . Alors, pour tous réels $a, b \in I$ on a :

Exemples :

1. $\int_{-1}^3 x^2 - x \, dx =$

2. Soit $\alpha \geq 0$, $\int_0^1 x^\alpha \, dx =$

2.3 Deux techniques de calcul d'intégrales

2.3.1 Intégration par parties

Définition

Soit I un intervalle. On dit d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est **de classe $\mathcal{C}^1$** lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée est continue.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Remarques :

a) Si f est continue, alors toute primitive F de f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire (*comprenez-vous bien ce que ça veut dire ?*), on dira que c'est un **espace vectoriel**.

Proposition (Intégration par parties)

Soit I un intervalle et $(u, v) \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}))^2$. On a, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'v =$$

Démonstration

.

Exemple : en utilisant une IPP, calculer $\int_0^\pi t \cos t \, dt$.

2.3.2 Changement de variables

Proposition

Soit I un intervalle, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, f une fonction continue sur $\varphi(I)$.
Pour tous a et b dans I , on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Exemples :

a) Calculer $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2t \cos(t^2) \, dt$

b) On veut calculer $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx$.

Aucune primitive ne vient à l'idée, une IPP ne semble pas appropriée. Par contre, le changement de variables $x = t^2$ permettra de « tuer » la racine au numérateur.

On aurait alors $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ qui deviendra $\frac{\sqrt{t^2}}{t^2+1}$ puis, si on prend t positif : $\frac{t}{t^2+1}$.

Il reste à réfléchir sur les bornes et sur l'élément différentiel.

On a $t = 1$ quand $x = 1$ et $t = \sqrt{3}$ quand $x = 3$. D'autre part, $\frac{dx}{dt} = \frac{dt^2}{dt} = 2t$ donc $dx = 2t \, dt$.

$$\text{Alors, } \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1} \times 2t \, dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1} \, dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) \, dt.$$

On connaît une primitive, on peut donc conclure le calcul :

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx =$$

Méthode (Pour calculer une intégrale $I = \int_a^b f(x) \, dx$)

1. On cherche une primitive de f . Si on en trouve une, F , c'est gagné : $I = F(b) - F(a)$.
2. Sinon, on peut chercher à faire une IPP. Un indice qui doit y faire penser : si f est un produit.
Attention : parfois il faut en faire plusieurs à la suite.
3. Sinon, on peut chercher à faire un changement de variables. Pour cela on va poser $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$. Ensuite, on cherche les nouvelles bornes et l'élément différentiel.
4. Si rien ne semble fonctionner, on peut toujours utiliser une méthode numérique pour approcher la valeur de l'intégrale (on verra comment procéder en informatique).

Mise en œuvre : exercices 1, 5, 6, 7

3 Cas $b(x) = 0$

Définition

L'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est dite équation sans second membre ou encore **équation homogène**. On la note (E_h) .

Supposons que a admette une primitive A sur I . Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** Supposons que f soit solution de (E_h) sur I .
 - a) Prouver que la fonction $g(x) = f(x)e^{A(x)}$ est constante sur I .

b) En déduire une expression de $f(x)$.

- **Synthèse :**

Remarque : si I n'est pas un intervalle, on peut avoir f' nulle sur I sans que f soit constante sur I . Par exemple :

Proposition

Soit $(E_h) : y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle homogène, avec $a : I_{\text{intervalle}} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Supposons que $A(x)$ soit une primitive de $a(x)$ sur I . Alors, les solutions de (E_h) sont les fonctions définies sur I par une expression de la forme $f_\lambda(x) = \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) .

Autrement dit :

$$y' + a(x)y = 0 \iff$$

Remarque : Si $a(x)$ est une constante a alors on peut prendre $A(x) = \dots\dots$

Exemples : Résoudre les deux équations différentielles suivantes.

- $(E_1) : y' + 2ty = 0$
- $(E_2) : 3y' + 5y = 0$

4 Equation Complète

Nous allons dans cette dernière partie résoudre l'équation complète $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ en se servant de la résolution de $(E_h) : y' + a(x)y = 0$ que nous avons déjà vue.

4.1 Solution générale de (E)

Supposons que l'on connaisse une fonction f qui soit solution de (E) , c'est-à-dire telle que :

a) Soit g une fonction dérivable. Prouver que g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E_h) .

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Théorème

Soit $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ avec $a(x)$ et $b(x)$ des fonctions définies sur un intervalle I . Supposons que :

- $A(x)$ soit une primitive de $a(x)$ sur I ;
- f soit une **solution particulière** de (E) .

Alors, l'ensemble des solutions de (E) est :

Exemple : résoudre $(E) : y' - 3y = 2$

4.2 Recherche de solutions particulières

4.2.1 Chercher une solution qui ressemble à $b(x)$

Exemples :

- Résoudre $(E_1) : y' + y = 4t + 1$

Que dire sur le second membre ? Quelle forme de solution particulière peut-on tester ?

- Résoudre $(E_2) : y' + 5y = e^{-t}$

4.2.2 Principe de superposition

Proposition

Soit $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ une équation différentielle.

Si f_1 et f_2 sont des solutions particulières de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$ alors :

Démonstration

Remarque : le principe de superposition vient du caractère **linéaire** de l'équation différentielle étudiée. Lorsqu'on étudiera les équations linéaires du second ordre, il s'appliquera toujours.

4.2.3 Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution à $y' + a(x)y = b(x)$ de la forme $f(x) = k(x)e^{-A(x)}$. On a :

$$(f(x) = k(x)e^{-A(x)} \text{ est solution de } (E)) \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff k'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

Finalement, si on sait trouver une primitive de $b(x)e^{A(x)}$, on la prend pour $k(x)$ et $f(x) = k(x)e^{-A(x)}$ est solution particulière de (E) .

4.3 Problème de Cauchy

Lorsqu'on parvient à résoudre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ on obtient une infinité de solutions.

Si l'équation (E) provient d'un contexte expérimental, on cherche **une** solution qui correspond à la situation observée.

Pour cela, on va utiliser des conditions supplémentaires (une pour le premier ordre, deux pour le second) qui vont permettre de fixer les constantes (une par ordre). Souvent, ces conditions sont observées au début de l'expérience, on parle donc de **conditions initiales**.

Sur nos exemples de référence :

- Désintégration d'éléments radioactifs : $y(0) = N_0$, le nombre de noyaux au temps $t = 0$.
- Pendule : $y(0) = \theta_0$ et $y'(0) = 0$, l'angle duquel on lâche le pendule à une vitesse initiale nulle.
Remarque : deux conditions car c'est une équation d'ordre 2, la résolution apportera une infinité de solutions dépendant de deux paramètres qu'il faut fixer.
- Cinétique chimique : $y(0) = [A]_0$: concentration de A au début de la réaction.

Méthode (Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre)

1. on met l'équation sous la forme $y' + a(t)y = b(t)$ (si on fait une division, on peut être conduit à travailler sur plusieurs intervalles) ;
2. on résout l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. On obtient un ensemble S_h qui contient une infinité de fonctions.
3. On cherche une solution particulière f de (E) . On peut chercher de la forme du second membre, avec le principe de superposition si le second membre a « deux parties » , avec la variation de la constante. Il peut arriver qu'on ne trouve pas.
4. La solution générale de (E) est l'ensemble S des fonctions qui sont la somme de f et d'un élément de S_h . Il y en a une infinité.
5. Si on a une condition initiale, on trouve dans S l'unique fonction qui la vérifie.

Mise en œuvre : exercices 1, 8, 9, 10