Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Couple de variables aléatoires discrètes, indépendance

I.1 Couple

Définition 1 (Couple de variables aléatoires discrètes).

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'application **couple** notée (X, Y) définie par $(X, Y) : \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Définition 2.

Etant données X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire (X, Y), définie par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x,y)\}) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Les lois $\mathbf{P}_X$ de X et $\mathbf{P}_Y$ de Y sont appelées les **lois marginales** de (X, Y).

exemple 1. En pratique, on fait un tableau à double entrée donnant les $\mathbf{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$:

$Y \setminus X$	x_0	x_1	x_2	$\mathbb{P}_X$
y_0	1/16	2/16	3/16	6/16
y_1	1/16	7/16	2/16	10/16
$\mathbb{P}_Y$	2/16	9/16	5/16	

Remarque 1. Attention : la données des marginales ne donne pas la loi du couple !
contre-exemple : (X, Y) suit la loi uniforme sur $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
et (X', Y') donnée par $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,0) = 1/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,0) = 3/8$ $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,1) = 3/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,1) = 1/8$ ont les mêmes marginales, mais ne sont pas égales !!!
En revanche, $\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x)$: la loi du couple donne les marginales.

Définition 3.

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de Y sachant** $\{X = x\}$ la loi de probabilité définie pour les $y \in Y(\Omega)$ par $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$.

I.2 Rappel : indépendance de deux variables

Définition 4.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(\{X = x, Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Remarque 2. on note $\{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$

Proposition 1.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$\mathbf{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

Démonstration hors programme

Proposition 2.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

I.3 Rappel : espérance d'un produit de v.a.r. indépendantes

Proposition 3.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X, Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

II. Corrélation et covariance

II.1 Variance d'une somme, covariance

Proposition 4.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$.

Démonstration : $((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))^2 = (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) + (Y - \mathbb{E}(Y))^2$

II.2 Covariance, corrélation

Définition 5 (Covariance).

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

En cas d'indépendance, la covariance est nulle.

Proposition 5.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration

Définition 6 (coefficient de corrélation).

$\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}}$

Remarque 3. En cas d'indépendance, la corrélation vaut 0.
En cas de ralation $Y=aX+b$, la corrélation vaut 1 ou -1.

Définition 7.

Écart type $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition 6 (Cauchy-Schwarz).

Soient X,Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)\leq\sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}$$

$$-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1$$

démonstration : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\mathbb{V}(tX+Y)=t^2\mathbb{V}(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y)$, trinôme dont le discriminant ne change pas de signe.

Dans le cas de variables à valeurs dans un ensemble fini, il y a égalité ssi $X-\mathbb{E}(X)$ et $Y-\mathbb{E}(Y)$ sont colinéaires, i.e. ssi $\exists\ a;\ a(X-\mathbb{E}(X))=Y-\mathbb{E}(Y)$ ssi $\exists\ a,b;\ aX+b=Y$ $\square$

Remarque 4. Régression linéaire : si $|\rho|=1$, alors égalité dans Cauchy-Schwarz : $(X-\mathbb{E}(X))$ et $(Y-\mathbb{E}(Y))$ sont colinéaires, donc il existe a,b tels que $Y=aX+b$.

Sinon, on pose $\Xi=\begin{pmatrix}y_1 & \dots & y_N\end{pmatrix}$ et $\Gamma=\begin{pmatrix}y_1 & \dots & y_N\end{pmatrix}$

on cherche $\hat{a},\hat{b}$ tels que $\left\|\Gamma-\hat{a}\Xi+\hat{b}(1\dots1)\right\|_2^2=\left\|M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\Gamma\right\|_2^2$ soit minimale, avec $M=\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_N\\1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

OK pour $\hat{V}=\begin{pmatrix}\hat{a}\\\hat{b}\end{pmatrix}$le projeté de Γ sur $\mathrm{Im}(M)$.

III. Suites de variables aléatoires

III.1 Introduction : répétition d'évènements indépendants

Exemple :
on répète une expérience incertaine sur une grande population de taille N_0, et on aimerait comprendre le phénomène « en moyenne. »

• **Pour le probabiliste**, il s'agit de déterminer un modèle aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, représentant les différents résultats individuels.
Le comportement moyen d'un groupe de N variables est caractérisé par la variable aléatoire moyenne

$$S_N = \frac{X_1 + \ldots X_N}{N}$$

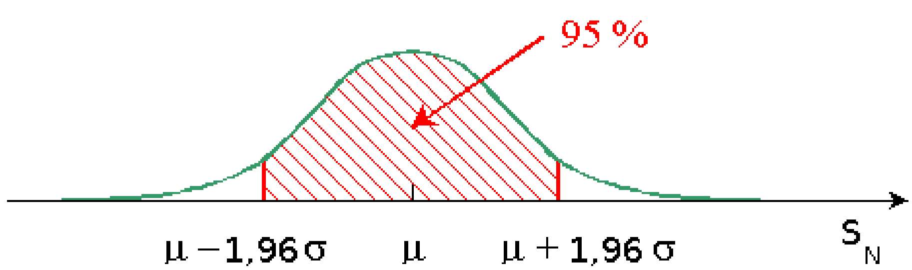
Il s'agit de comprendre les lois de S_N pour $N \in [\![1, N_0]\!]$.

• **Pour le statisticien**, on dispose d'un échantillon $(x_1, \ldots, x_N)$ correspondant à un sondage d'une partie de la population, et on aimerait tester son comportement moyen, à l'aide d'un modèle probabiliste, pour prédire l'état du système $(x_1, \ldots, x_{N_0})$
Pour cela, on s'appuie sur la moyenne observée $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \ldots x_N}{N}$ sur l'échantillon sondé.

Réponse du programme de lycée :
Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes de même loi usuelle,
admettant une « espérance »$\mu \in \mathbb{R}$ et une « variance » $\sigma^2 > 0$, alors lorsque $N \to +\infty$
$S_N = \dfrac{X_1 + \ldots X_N}{N}$ se comporte comme une variable gaussienne de densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
On a

$$\mathbf{P}\left(\left\{|S_N - \mu| \leq 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right) \leq 0,95$$

ce qui signifie qu'avec une probabilité supérieur à 95%, $\left|\dfrac{X_1 + \ldots X_N}{N} - \mu\right| \leq 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$



Interprétation : la moyenne empirique observée sur l'échantillon $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \ldots x_N}{N}$ doit être souvent proche de l'espérance μ, et dans l'intervalle de cofiance $I_{0,95} = [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ dans 95% des observations.

III.2 Indépendance d'une famille de variables

Définition 8 (Variables mutuellement indépendantes).

Des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ \mathbf{P}((X_i)_{1\le i\le n} = (x_i)_{1\le i\le n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

Définition 9 (Suite de variables aléatoires indépendantes).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.

- On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si $\forall i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
- On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

exemple 2. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

On note $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, et $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $b(p)$.

Alors $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(N,p)$.

En effet, S_N est à valeurs dans $[\![0,N]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,N]\!]$ on a :

$$\mathbf{P}(\{S_N = k\}) = \mathbf{P}(\{\sum_{i=1}^{N} X_i = k\}) = \mathbf{P}(\bigcup_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \{(X_1,\dots,X_N) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\}) \underset{evnmts\ incompatibles}{=} \sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \mathbf{P}(\{(X_1,\dots,X_N) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\}) \underset{indep.}{=} \sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} p^k(1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

exemple 3. Attention : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse !

Contre-exemple : X et Y indépendantes de loi $b(1/2)$, $Z = (2X-1)(2Y-1)$.

$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) + \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/2$ $\mathbf{P}(Z=-1) = \mathbf{P}(X=0, Y=1) + \mathbf{P}(X=1, Y=0) = 1/2$

$\mathbf{P}(Z=1, X=0) = \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)$, $\mathbf{P}(Z=1, X=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=1)$ d'où l'indépendance 2 à 2.

En revanche, $\mathbf{P}(Z=1, X=0, Y=1) = 0 \neq \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$

IV. Résultats avancés

IV.1 Positivité, croissance de l'espérance

Proposition 7.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une espérance (indépendantes ou non), alors
$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

démonstration : Par récurrence sur $n \geq 2$. $\square$

Proposition 8 (Positivité, croissance de l'espérance).

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
- [Positivité] Si X est à valeurs positives et admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- [Croissance] Si X et Y admettent des espérances et si : $X(\omega) \leq Y(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

démonstration : Pour la positivité de l'espérance on remarque que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ est la somme d'une série convergente positive.
Pour la croissance de l'espérance, il suffit d'appliquer le poin précédent à $Y - X \geq 0$ et par linéarité $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geq 0$.

IV.2 Première inégalité de Markov

Proposition 9 (1ère Inégalité de Markov).

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance finie.
Alors pour tout $t > 0$, on a $\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{t}}$

démonstration :
On note Y la v.a.r. définie pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) = \begin{cases} t & \text{si } |X(\omega)| \geq t \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| < t \end{cases}$
Ainsi Y est égale à t si $X \geq t$ et à 0 sinon, et se note $Y(\cdot) = t\ \mathbf{1}_{|X| \geq t}(\cdot)$.
On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\boxed{|X(\omega)| \geq Y(\omega)}$
(car si ω est tel que $|X(\omega)| \geq t$, alors $|X(\omega)| \geq = Y(\omega)$ et si ω est tel que $|X(\omega)| < t$, alors $|X(\omega)| \geq 0 = Y(\omega)$)
Y est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, donc admet une espérance.
$|X|$ admet une espérance, car la série $\sum |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge, puisque X admet une espérance.
D'après la croissance de l'espérance, on en déduit que :
$\boxed{\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(Y)}$
or $\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbf{P}(\{Y = 0\}) + t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{|X| \geq t\})$
d'où $\mathbb{E}(|X|) \geq t\mathbf{P}(|X| \geq t)$, puis on divise par $t > 0$. $\square$

IV.3 Variance d'une somme

3.a) Variance d'une somme

Proposition 10.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une variance, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

démonstration : Calcul direct, par récurrence sur n. □

Proposition 11.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une variance et deux à deux indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

démonstration : le second terme est nul par espérance d'un produit de va indépendantes. □

exemple 4. Pour $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ de loi $\mathcal{B}(N, p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(X_k) = Np(1-p)$$

exemple 5. Pour S_N de loi $\mathcal{B}(N, p)$, $\mathbb{V}\left(\frac{1}{N} S_N\right) = \frac{1}{N^2} \mathbb{V}(S_N) = \frac{p(1-p)}{N}$

IV.4 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

En corollaire de l'inégalité de Markov, on en déduit une seconde inégalité :

Corollaire 12 (2ème inégalité de Markov)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{t^2}$

démonstration : Markov appliqué à la v.a.r. X^2, en remarquant que $X^2 \geq t^2 \iff |X| \geq t$. □

Proposition 13 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$

démonstration : 2ème inégalité de Markov appliqué à $(X - \mathbb{E}(X))$ □

Remarque 5. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la variation par rapport à la moyenne.

IV.5 Application : Loi des grands nombres

Théorème 14 (Loi faible des grands nombres)**.**

si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

démonstration : Conséquence de Bienaymé-Tchebychev pour $X = \dfrac{S_n}{n}$, variable d'espérance m et de variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leq \dfrac{\frac{1}{n}\times\sigma^2}{\varepsilon^2}}$ □

Remarque 6. Intervalle de confiance à 95% pour $n = 1000$ tirages $0,95 = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, donc $\varepsilon = \sqrt{0.95} * \sigma * n$ c'est peu précis.

En pratique celui obtenu par le théorème de la limite centrale est meilleur.

Remarque 7. (HP) Méthode de Monte-Carlo : pour approcher $\displaystyle\int_0^1 f$, on calcule $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(X_i)}{N}$ pour des X_i de loi uniforme sur $[0, 1]$...

V. Approximation d'une binomiale par une loi de Poisson

Proposition 15 (Approximation binomiale par Poisson)**.**

Soit $\lambda > 0$ fixé.
Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$

démonstration :

$$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})\ \times(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})\ \times e^{n\ln(1-np/n)}\ \times e^{-k\ln(1-np/n)}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times 1\times e^{-\lambda}\times 1\qquad\square$$

exemple 6. Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,02$. On a $np=2$ et les conditions d'approximation ($np(1-p)\leq 10$) par une loi de Poisson sont réalisées, en posant $\lambda=np=2$. Soit m la probabilité cherchée ; avec les notations ci-dessus, on a :

$\mathbf{P}(X=k)=e^{-2\times 2k}/k!$, donc $1-m\approx\mathbf{P}(X=0)+\mathbf{P}(X=1)=0,406$, soit : $m\approx 0,6$

L'application (peu pratique) de la loi binomiale aurait fourni $1-m=(0,98)100+2(0,98)99\approx 0,403$. Soit $m\approx 0,597$. L'approximation est donc ici excellente.

Programme PC :

B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

Contenus	Capacités & commentaires
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Encadrement $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.

e) Résultats asymptotiques

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

$\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation.

La notion de convergence en loi est hors programme.

Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

$\leftrightarrows$ I : simulation d'une suite de tirages.