Table des matières

Pré-requis

Objectifs

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I. Equation différentielle d'ordre 1 ou 2 : PCSI

I.1 Rappels de PCSI : E.D. linéaires d'ordre 1

Théorème 1 (équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{K}$, et $g : I \to \mathbb{K}$ dérivable.
Notons $\boxed{(H)\ :\ y' - ay = 0}$ et $\boxed{(E)\ :\ y' - ay = g(t)}$.
• L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto \lambda e^{at},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

• Si y_P est une solution particulière de (E),
l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{at},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

Remarque 1. (HP) En physique, on utilise la méthode de (« variation de la constante ») : on cherche une solution particulière y_P sous la forme $y_P : t \mapsto \lambda(t)e^{at}$

exemple 1. $y' - 2y = x$ $(r = 2)$

```
> dsolve(diff(yh(x), x) - 2*yh(x)=0); dsolve(diff(y(x), x) - 2*y(x)=x);
yh(x) = C1*exp(2*x)
y(x) = -1/4-(1/2)*x+C1*exp(2*x)
```

Théorème 2 (équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients continus avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{K}$ continue, et A une primitive (quelconque) de a sur I, et $g : I \to \mathbb{K}$ dérivable.
Notons $\boxed{(H)\ :\ y' - a(t)\ y = 0}$ et $\boxed{(E)\ :\ y' - a(t)\ y = g(t)}$.
• L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H) est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto \lambda e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

• Si y_P est une solution particulière de (E) ,
l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

exemple 2. $x^3y' + 3x^2y = 1$

```
> dsolve(x^3*diff(yh(x), x) +3*x^2*yh(x)=0); dsolve(x^3*diff(y(x), x) +3*x^2*y(x)=1);
yh(x) = C1/x^3
y(x) = (x+C1)/x^3
```

I.2 Rappels de PCSI : E.D. linéaires du second ordre à coefficients constants

Théorème 3 (équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, b et c appartenants à $\mathbb{K}$, et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.
Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes de l'équation $r^2 - ar - b = 0$.
Notons $\boxed{(H)\ :\ y'' - ay' - by = 0}$ et $\boxed{(E)\ :\ y'' - ay' - by = g(t)}$.
Notons $\mathcal{S}_{\mathbb{C},H}$ l'ensemble des solutions complexes de l'équation différentielle (H) et $\mathcal{S}_{\mathbb{C},E}$ l'ensemble des solutions complexes de l'équation différentielle (E).

- Si $\boxed{r_1 \neq r_2}$ et y_P est une solution particulière de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},H} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$ et
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},E} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

- Si $\boxed{r_1 = r_2}$ et y_P est une solution particulière de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},H} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_1 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$ et
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},E} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto y_p(t) + (\lambda + \mu t)e^{r_1 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

Lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$, les solutions réelles sont exactement les fonctions de la forme $x : t \mapsto \ell Re(f(t)) + m\, Im(f(t))$ pour f soution complexe et $\ell, m \in \mathbb{R}$.

En effet y est solution complexe de (H) ssi $\mathrm{Re}(y)$ et $Im(y)$ sont solutions réelles. En posant $r_1 = u + \mathbf{i}v$ et $r_2 = u - \mathbf{i}v$ pour $u, v \in \mathbb{R}$, on remarque que$e^{r_1 t} = e^{ut}(\cos(vt) + \mathbf{i}\sin(vt))$, puis on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R},H} = \left\{x : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto \ell\ e^{ut}\cos(vt) + m\ e^{ut}\sin(vt),\ (\ell,m) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$ et
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R},E} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto y_p(t) + \ell\ e^{ut}\cos(vt) + m\ e^{ut}\sin(vt),\ (\ell,m) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Rappel : dans (E), si g est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\gamma t}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, et m la multiplicité de γ dans $X^2 + bX + c$, on peut chercher y_P sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ avec $\deg Q = m + \deg P$.

exemple 3. $\underline{y'' - 2y = 1}$ $\quad (r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2})$

```
> dsolve(diff(y(x), x, x) - 2*y(x)=1);
y(x) = exp(sqrt(2)*x)*C2+exp(-sqrt(2)*x)*C1-1/2
```

Remarque 2. si $g : I \to \mathbb{R}$ est à valeurs réelles, on a un espace affine de solutions réelles : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. : $\alpha - \mathbf{i}\beta = r_2 = \overline{r_1}$,
$\mathcal{S}_E = \left\{f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{r_1 t} + \overline{\lambda} e^{r_2 t};\ \lambda \in \mathbb{C}\right\} = \left\{f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto y_p(t) + e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right);\ (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$

exemple 4. $\underline{y'' + 2y = 1}$ $\quad (r_1 = \mathbf{i}\sqrt{2}, r_2 = -\mathbf{i}\sqrt{2})$

```
> dsolve(diff(y(x), x, x) + 2*y(x)=1);
yw(x) = sin(sqrt(2)*x)*C2+cos(sqrt(2)*x)*C1+1/2
```

Proposition 4.

Pour une équation $(E)\ :\ y''+by'+cy = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ de second membre de la forme $c(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ avec $A,B,\omega,b,c\in\mathbb{R}$, on peut chercher une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p : t \longmapsto C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t)$$

Remarque 3. (HP) Si le second membre est de la forme $c(t)=Ae^{rt}$, avec $A,r\in\mathbb{R}$, on peut chercher une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p : t \longmapsto Bt^m e^{rt}$$

où m est la multiplicité de r dans le polynôme caractérstique X^2-bX-c.

II. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, sans second membre

II.1 Dérivation vectorielle

Définition 1.

On dit qu'une application vectorielle $X:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ t\longmapsto\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$ est **dérivable** si et seulement si ses fonctions composantes $x_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont dérivables, pour $1\leq i\leq n$.

Si tel est le cas, on note $X':\mathbb{R}\to\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ t\longmapsto\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}$ sa dérivée vectorielle.

Proposition 5 (DL1 vectoriel).

Si $X:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dérivable en t_0, alors :

$$X(t_0+h)\underset{h\to0}{=}X(t_0)+hX'(a)+\overrightarrow{o}(h)$$

et $X'(t_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}(X(t_0+h)-X(t_0))$

démonstration :

On sait que $x_i(t_0+h)\underset{h\to0}{=}x_i(t_0)+hx_i'(t_0)+o(h)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

donc vectoriellement : $\begin{pmatrix}x_1(t_0+h)\\ \vdots\\ x_n(t_0+h)\end{pmatrix}\underset{h\to0}{=}\begin{pmatrix}x_1(t_0+h)\\ \vdots\\ x_n(t_0)\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}x_1'(t_0)\\ \vdots\\ x_n'(t_0)\end{pmatrix}+\overrightarrow{o}(h)$

puis $\dfrac{1}{h}(X(t_0+h)-X(t_0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h}(x_1(t_0+h)-x_1(t_0)) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{h}(x_n(t_0+h)-x_n(t_0)) \end{pmatrix} \xrightarrow[h\to 0]{} X'(t_0)$ □

Remarque 4. On a (comme pour les fonctions réelles de la variable réelle) équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.

II.2 Ecriture générale, solutions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de « l'espace des positions » $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.

On appelle système différentiel linéaire (à coefficients constants, sans second membre) tout système d'équations de la forme :

$$(\mathcal{H}) \quad : \quad \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1(t) + \cdots + a_{1n}\ x_n(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\ x_j(t) \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1(t) + \cdots + a_{nn}\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

ou encore, en notant $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$$\boxed{X'(t) = A\ X(t)} \qquad (\mathcal{H})$$

où t désigne le temps, $X : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction dérivable inconnue, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5. Ainsi, A permet d'écrire une relation entre la vitesse X' et la position X à chaque instant.

Définition 3.

On appelle solution de $(\mathcal{H})$ sur I toute fonction dérivable $X : I \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t)$$

exemple 5. $n = 1$: équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre :

$$y'(t) = 2y(t)$$

(prendre $A = 2$)

exemple 6. $n = 1$: équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre : $\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{cases}$

prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

II.3 Résolution lorsque D est une matrice diagonale

• Cas diagonal

Proposition 6.

Soient $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ et $D = Diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de

$$Z' = D\ Z \qquad (H)$$

est : $\mathcal{S}_H = \left\{ Z : t \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ \mu_n e^{d_n t} \end{pmatrix} ; \ (\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \right\}$

démonstration :
on applique le cours de PCSI aux EDL 1 à coefficients constants vérifiées par les composantes : $z_i' = d_i z_i$ et $z_i(t_0) = z_{0i}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. $\square$

Remarque 6. Il s'agit de l'espace vectoriel de dimension n engendré par les $W_i : t \longmapsto e^{d_i t} E_i$, où $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

exemple 7. $t_0 = 1$, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Le système différentiel $Z' = AZ$ admet pour unique solutions les $t \longmapsto \begin{pmatrix} \mu_1 e^{-t} \\ \mu_2 e^{3t} \end{pmatrix}$, pour tout $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^2$.

II.4 Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{K}$

lemme 7. Pour $Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, et $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable, on a $QV : t \mapsto Q\ V(t)$ dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{(Q\ V)'(t) = Q\ V'(t)}$

dém : Pour $1 \leq i \leq n$, la $i$ème composant de QV est $y_i : t \longmapsto \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\ v_j(t)$, elle est dérivable, comme somme de telles applications, et sa dérivée est $y_i' : t \longmapsto \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\ v_j'(t)$ $\square$

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **diagonalisable** et $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de $X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.

On souhaite résoudre le système différentiel : $X' = A\ X \qquad (H)$

• Mise sous forme diagonale :

Soit $P = (V_1 | \ldots | V_n) \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = PDP^{-1}X(t) \underset{P \text{ inversible}}{\iff} \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}(X'(t)) = DP^{-1}X(t)$$

$$\underset{\text{dérivation linéaire}}{\iff} \forall t \in \mathbb{R},\ (P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = D\ Z(t) \iff \boxed{Z' = D\ Z \qquad (H^*)}$$

• Résolution du système diagonal :

en posant $Z : t \longmapsto P^{-1}X(t)$

(on reconnaît la formule de changement de base $X = PZ$, avec Z écriture dans la "nouvelle base" $(V_1, \dots, V_n)$).

On en déduit qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ que Z est de la forme :

$$Z : t \longmapsto \begin{pmatrix} \mu_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ \mu_n e^{d_n t} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t} E_k, \text{ avec } (E_1, \dots, E_n) \text{ la base canonique de } \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).\ Z : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t} E_k$$

• Résolution du système initial :

On en déduit que les solutions de (H) sont les applications $X : t \longmapsto PZ(t)$, avec Z sulution de (H^*), c'est à dire les applications telles qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$X :\ t \longmapsto P \begin{pmatrix} \mu_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ \mu_n e^{d_n t} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t} P E_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t} V_k \text{ ou encore } X :\ t \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \mu_j e^{d_j (t - t_0)} V_j$$

Proposition 8 (cas diagonalisable sur $\mathbb{C}$).

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **diagonalisable** ; notons $\boxed{X'(\cdot) = A\ X(\cdot) \quad (H)}$.

Soient $D = Diag(d_1, \dots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}' = (V_i)_{1 \le i \le n} \in (\mathbb{C}^n)^n$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ AV_i = d_i V_i$, et $P = (V_1 | \dots | V_n) \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mu_k\ e^{d_k t}\ V_k;\ (\mu_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

démonstration :

Pour $A = PDP^{-1}$, on a $X' = AX \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \iff Z' = DZ$, avec $X = PZ$

Il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout t réel :

$$PZ(t) = (V_1 | \dots | V_n) \times \left(\mu_k e^{d_k t}\right)_{1 \le k \le n} = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\ \mu_k e^{d_k t} \right)_{1 \le i \le n} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t}\ \left(p_{ik}\right)_{1 \le i \le n} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t}\ V_k. \qquad \square$$

Remarque 7. En pratique : si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on applique la méthode et on obtient des solutions réelles.

II.5 Résolution lorsque A est une matrice réelle diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Proposition 9.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Re}(\mathbf{i}z) = \dfrac{\mathbf{i}z - \mathbf{i}\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}(\mathbf{i}z) = \mathbf{i}^2\ \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}} = -\,\mathrm{Im}(z)$

lemme 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$, $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $\delta = u + \mathbf{i}v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mu \mathbf{e}^{\delta t} W$ est vecteur à coordonnées réelles si et seulement si $\overline{X(t)} = X(t) = \mathrm{Re}(X(t))$, auquel cas,

$$\boxed{X(t) = \mathbf{e}^{ut}\left(a \,\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right) - b \,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right)\right)}$$

dém : $X(t) = \mathrm{Re}(X(t)) = \mathrm{Re}(e^{ut}(a + \mathbf{i}b)\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W) = \mathbf{e}^{ut}\left(a \,\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right) - b \,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right)\right)$ □

On remarque même que : $X(t) = \mathbf{e}^{ut} \cos(vt)(a \,\mathrm{Re}\, W + b \,\mathrm{Im}(W)) + \mathbf{e}^{ut} \sin(vt)(-a \,\mathrm{Im}\, W - b \,\mathrm{Re}(W))$

Conséquence : pour obtenir des solutions réelles : dans le cas où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$:
Pour chaque valeur propre $\delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ associée à un vecteur propre W, son conjugué $\overline{\delta}$ est v.p. associée au vecteur propre $\overline{W}$.

Pour $(\mu, \mu') \in \mathbb{C}^2$, il est nécessaire pour que $\mu \mathbf{e}^{\delta t} W + \mu' \mathbf{e}^{\overline{\delta} t} \overline{W}$ soit réel, d'avoir (en calculant pour $t = 0$) $\mu W + \mu' \overline{W} = \overline{\mu} \overline{W} + \overline{\mu'} W$, donc en identifiant sur la famille libre $(W, \overline{W})$, on a : $\boxed{\mu = \overline{\mu'}}$

Mais alors, on peut réécrire : $\mu \mathbf{e}^{\delta t} W + \mu' \mathbf{e}^{\overline{\delta} t} \overline{W} = \mathbf{e}^{ut}\left(\alpha \,\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right) - \beta \,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt} W\right)\right)$

exemple 8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\delta, \overline{\delta}\}$ avec $\delta = \mathbf{i}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}$, les solutions réelles de $X' = AX$ sont de la forme $t \longmapsto \alpha \,\mathrm{Re}(e^{\mathbf{i}t} W) - \beta \,\mathrm{Im}(e^{\mathbf{i}t} W)$, i.e. de la forme $t \longmapsto \alpha \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

exemple 9. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda, \delta, \overline{\delta}\}$ avec $\lambda = 2$ et $\delta = 1 + \mathbf{i}$, $\overline{\delta} = 1 - \mathbf{i}$ associées aux vecteurs propres $W_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $W_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_{\overline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une base des solutions du système diagonal est $\left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(1+\mathbf{i})t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{(1-\mathbf{i})t} \end{pmatrix}\right)$.

Une base des solutions du système $X' = AX$ est $\left(t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{Re}(e^{(1+\mathbf{i})t} W_\delta), t \mapsto \mathrm{Im}(e^{(1+\mathbf{i})t} W_\delta)\right)$.

Les solutions réelles sont de la forme $t \longmapsto \lambda e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \xi e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Proposition 11 (Solutions réelles).

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**, $D = Diag(d_1, \dots, d_r, \delta_1, \overline{\delta_1}, \dots \delta_s, \overline{\delta_s}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, avec $0 \leq r \leq n$, $r + 2s = n$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \dots, \delta_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}' = ((V_j)_{1 \leq j \leq r}, (W_k, \overline{W_k})_{1 \leq k \leq s})$ une base de $\mathbb{C}^n$, avec $AV_j = d_j V_j$ et $V_j \in \mathbb{R}^n$ pour $1 \leq j \leq r$ et $AW_k = \delta_k W_k$ et $W_k \in \mathbb{C}^n$ pour $1 \leq k \leq s$ (alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A\overline{W_i} = \overline{\delta_i W_i}$) et P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.
Notons $\quad X'(\cdot) = AX(\cdot) \quad (H)$.
Alors l'ensemble des solutions **réelles** $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de (H) : $X'(t) = AX(t)$ est

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^{r} \mu_j e^{d_j t} V_j + \sum_{\ell=1}^{s} \nu_\ell \operatorname{Re}(e^{\delta_\ell t} W_\ell) + \xi_\ell \operatorname{Im}(e^{\delta_\ell t} W_\ell),\ ((\mu_j)_{1 \leq j \leq r}, (\nu_\ell, \xi_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

démonstration :
Il suffit de regrouper par couples (δ_i, W_i) et $(\overline{\delta_i}, \overline{W_i})$ conjugués, en utilisant le lemme précédent.
$(\lambda, V) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est un « couple propre »de A ssi $AV = \lambda V$, avec $V \neq 0$ ssi $A\overline{V} = \overline{\lambda V}$, avec $V \neq 0$ ssi $(\overline{\lambda}, \overline{V}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est un« couple propre »de A

Dans le cas où $Sp(A)$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{C}^n = E = \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(A) \cap \mathbb{R}} E_\lambda \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(A) \setminus \mathbb{R}} E_\lambda \right) = \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(A) \cap \mathbb{R}} E_\lambda \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(A) \setminus \mathbb{R},\ \operatorname{Im} \lambda > 0} (E_\lambda \bigoplus E_{\overline{\lambda}}) \right).$$

L'ensemble des solutions complexes de (H) est le $\mathbb{C}$-e.v.

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{C}(t \mapsto e^{d_j t} V_j) \oplus \bigoplus_{1 \leq k \leq s} (\mathbb{C}(t \mapsto e^{\delta_k t} W_k) \oplus \mathbb{C}(t \mapsto \overline{e^{\delta_k t} W_k})).$$

Parmi celles-ci, les solutions réelles sont leurs propres conjugués, donc de la forme

$X : t \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j e^{d_j t} V_j + \sum_{j=1}^{r} \nu_k \operatorname{Re}(e^{\delta_k t} W_k) + \xi_k \operatorname{Im}(e^{\delta_k t} W_k)$ avec $((\mu_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{R}^r$, et $(\nu_k, \xi_k)_{1 \leq j \leq r}) \in \mathbb{C}^{n-s}$

En conclusion, l'ensemble des solutions réelles de (H) est le $\mathbb{R}$-e.v.

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{R}(t \mapsto e^{d_j t} V_j) \oplus \bigoplus_{1 \leq k \leq s} \left(\mathbb{R}(t \mapsto \operatorname{Re}(e^{\delta_k t} W_k)) \oplus \mathbb{R}(t \mapsto \operatorname{Im}(e^{\delta_k t} W_k)) \right). \quad \square$$

III. Systèmes différentiels linéaires

III.1 Ecriture générale, solutions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de « l'espace des positions » $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.

On appelle système différentiel linéaire tout système d'équations de la forme :

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\ x_n(t) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)\ x_j(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)\ x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ou encore, en notant $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$$\boxed{X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t)} \qquad (\mathcal{E})$$

où t désigne le temps, $B : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction continue est connue, $X : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction dérivable inconnue, et $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ t \longmapsto (a_{ij}(t))_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$

Remarque 8. Ainsi, A et B permettent d'écrire une relation entre la vitesse X' et la position X à chaque instant.

Définition 5.

On appelle solution de $(\mathcal{E})$ sur I toute fonction dérivable $X : I \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

exemple 10. $n = 1$: équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre :

$$y'(t) = 2y(t)$$

(prendre $A : t \mapsto 2$)

On sait que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto K\ e^{2t}$, pour $K \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.

exemple 11. $n = 1$: équation différentielle d'ordre 1 à coefficients continus sans second membre :

$$y'(t) = (1 + t^2)y(t) + e^t$$

(prendre $A : t \mapsto 1 + t^2$)

On sait que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto K\ e^{t+\frac{t^3}{3}}$, pour $K \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.

exemple 12. $n = 1$: équation différentielle d'ordre 1 à coefficients continus avec second membre :

$$y'(t) = (1+t^2)y(t) + e^t$$

(prendre $A : t \mapsto 1+t^2$, et $B : t \mapsto e^t$)

exemple 13. $n = 2$: équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y''(t) = -y(t)$$

En posant $Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, l'équation $y''(t) = -y(t)$ peut se réécrire $Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z(t)$

Définition 6.

Si en outre on impose une condition initiale, on parle de **problème de Cauchy** :

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \begin{cases} X'(t) & = & A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{cases}}$$

avec t_0 l'instant initial, et $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la position à l'instant initial.

III.2 Problème de Cauchy

Définition 7.

On appelle solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ toute solution X de $(\mathcal{E})$qui vérifie : $X(t_0) = X_0$.

exemple 14. $n = 2$: oscillateur mécanique : $\begin{cases} -k\ x(t) & = & mx''(t) & (\mathcal{E}) \\ (x(t_0), x'(t_0)) & = & (x_0, v_0) & (\mathcal{CI}) \end{cases}$

(prendre $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\ t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m/k & 0 \end{pmatrix}$)

exemple 15. système différentiel (trajectoire ballistique)

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} v_x \\ -g\ t \end{pmatrix} & (\mathcal{E}) \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & (\mathcal{CI}) \end{cases}$$

Remarque 9. On ne fera rien sur les systèmes différentiels non linéaires comme celui HP suivant (oscillateur de Van der Pol non forcé) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ (s-x^2)y - x \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{E})$$

III.3 Théorie générale, structure de l'ensemble des solutions

Etant donnés I un intervalle réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues, on s'intéresse aux systèmes différentiels de la forme

$$\boxed{X' = A(t)X + B(t) \quad (\mathcal{E})}$$

où $X : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est inconnue.

L'équation homogène (ou sans second membre) associée est :

$$\boxed{X' = A(t)X \quad (\mathcal{H})}$$

3.a) Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 12 (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (ADMIS, preuve HP)).

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$ (un instant initial), $n \in \mathbb{N}^*$, $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (une position à l'instant initial), A, B deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Supposons que A et B sont **continues sur** I, alors le problème de Cauchy

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \begin{cases} X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) = X_0 & (\mathcal{CI}) \end{cases}}$$

admet une **unique solution** $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Remarque 10. X est $\mathcal{C}^\infty$, car par récurrence on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

⇆ I : Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.

3.b) Solutions

Proposition 13.

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$et $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
Notons $(\mathcal{H})\quad Z'(t) = A(t)\ Z(t)$, et $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Alors $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_\mathcal{H} \\ Z_0 & \longmapsto & Z, \text{ la solution du problème de Cauchy } \begin{cases} Z' = A(t)Z \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases} \end{array}$$

est un isomorphisme.
Ainsi **l'ensemble des solutions de** $(\mathcal{H})$ **est un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension** n.

démonstration :

La surjectivité découle de l'existence dans le théorème de Cauchy-Lipschitz : pour tout $Z \in \mathcal{S}_\mathcal{H}$, Z est la solution du problème de Cauchy valant $Z_0 = Z(t_0)$ en t_0.

L'injectivité découle de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz : si deux solutions Z et $\tilde{Z}$ vérifient $\mathcal{E}$ et la même condition initiale $Z(t_0) = \tilde{Z}(t_0) = Z_0$, alors elles sont égales. □

Proposition 14 (principe de superposition).

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$et $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
Notons $(\mathcal{E}) \quad X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t)$, et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
Soit $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée , et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Si $X_p : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{X : t \longmapsto X_p(t) + Z(t);\ Z \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$
Ainsi **l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un espace affine de dimension n, passant par X_p et dirigé par l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.**

démonstration :

$$X \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}} \Longleftrightarrow (\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t)) \Longleftrightarrow (\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)\ X(t) + X_p'(t) - A(t)X_p(t))$$
$$\Longleftrightarrow (\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)\ X(t) + X_p'(t) - A(t)X_p(t))$$
$$\underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{linéarité de la dérivation}} (\forall t \in I,\ (X - X_p)'(t) = A(t)\ (X(t) - X_p(t)) \Longleftrightarrow X - X_p \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \quad \square$$

III.4 Problèmes de Cauchy associés à une matrice diagonalisable

Proposition 15.

Soient $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ et $D = Diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $(z_{01}, \ldots, z_{0n}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de $Z_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Le problème de Cauchy $\boxed{(\mathcal{PC}) \left\{ \begin{array}{lcll} Z' & = & D\ Z & (H^*) \\ Z(t_0) & = & Z_0 & (\mathcal{CI}*) \end{array} \right.}$

admet pour unique solution l'application $Z : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ t \longrightarrow \begin{pmatrix} z_{01}e^{d_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ z_{0n}e^{d_n(t-t_0)} \end{pmatrix}$

<u>*démonstration :*</u> on évalue en t_0 et on trouve $\mu_i e^{d_i t_0} = z_{0,i}$.

exemple 16. $t_0 = 1$, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le problème de Cauchy $Z' = AZ$ et $Z(t_0) = Z_0$ admet pour unique solution $t \longmapsto \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} \\ 2e^{3(t-t_0)} \end{pmatrix}$.

Proposition 16.

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **diagonalisable** sur $\mathbb{C}$.
Soient $D = Diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}' = (V_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{C}^n)^n$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ AV_i = d_i V_i$, et $P = (V_1 | \ldots | V_n) \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.
Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de $X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{C})$.

Le problème de Cauchy $\boxed{(\mathcal{PC}) \left\{ \begin{array}{lcll} X' & = & A\ X & (H) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{array} \right.}$

admet pour **unique solution** l'application

$$X : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ t \longmapsto P \begin{pmatrix} z_{0,1} e^{d_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ z_{0n} e^{d_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} z_{0,1} e^{d_1(t-t_0)} V_k \text{ où } \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ \vdots \\ z_{0,n} \end{pmatrix} = Z_0 = P^{-1} X_0$$

démonstration :

On sait que X est de la forme $X : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t}\ V_k$ où $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$

on évalue en t_0 et on trouve $X_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t_0} V_k$.

En décomposant X_0 selon la base $(V_1, \ldots, V_n)$ sous la forme $X_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_{0,k} V_k$, avec $Z_0 = PX_0$, on obtient donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_{0,k} V_k \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t_0} V_k$, donc pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\mu_k = e^{-d_k t_0}(P^{-1}X_0)_k$.

□

III.5 Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable.

• Cas triangulaire

Méthode : Pour résoudre un système différentiel triangulaire $X' = TX$, avec $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$,

on résout successivement les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (variation des constantes) : $x'_n(t) = t_{nn} x_n(t)$, $x'_{n-1}(t) = t_{n-1nn-1} x_{n-1}(t) + t_{n-1nn} x_n(t)$, …, $x'_1(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{1j} x_j(t)$.

• Cas trigonalisable

On s'y ramène comme pour le cas diagonalisable à partir du cas diagonal.

IV. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

IV.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition 8 (Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus).

On appelle équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus système différentiel linéaire toute équation différentielle d'inconnue y de la forme :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (\mathcal{L})$$

où t désigne le temps, a, b, c sont des fonctions continues de l'espace $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, définies sur un intervalle réel I.

Remarque 11. Lorsque a ne s'annule pas, on se ramène à la théorie générale sur les systèmes linéaires :
En posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, l'équation $(\mathcal{L})$
est équivalente au système différentiel :

$$(\mathcal{E}) \quad X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t)/a(t) & -b(t)/a(t) \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t)/a(t) \end{pmatrix}$$

IV.2 Le théorème de Cauchy-Lipschiz linéaire

2.a) Le théorème

Théorème 17 (de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2).

Soient $t_0 \in I$, et $x_0, v_0 \in \mathbb{K}$, $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues et supposons que $\boxed{a \text{ ne s'annule pas sur } I}$.
Alors

le problème de Cauchy $\quad (PC) \begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y & = & d(t) \quad (L) \\ y(t_0) & = & x_0 \\ y'(t_0) & = & v_0 \end{cases}$ admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

<u>*démonstration :*</u> c'est un cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2.b) Conséquence : structure de l'espace des solutions

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

Proposition 18.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).
1) Pour $t_0 \in I$ fixé, l'application $\varphi_{t_0} : \mathcal{S}_H \longrightarrow \mathbb{K}^2;\ y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.
2) $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2.

démonstration : Par linéarité de la dérivation, $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-e.v., on vérifie aisément que pour tous $y, \tilde{y} \in \mathcal{S}_H$ et tout scalaire λ, $\varphi_{t_0}(y + \lambda\tilde{y}) = (y(t_0) + \lambda\tilde{y}(t_0), y'(t_0) + \lambda\tilde{y}'(t_0)) = \varphi_{t_0}(y) + \lambda\varphi_{t_0}(\tilde{y})$, donc φ_{t_0} est linéaire.
De plus,par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour $y, \tilde{y} \in \mathcal{S}_H$, on a $\varphi_{t_0}(y) = \varphi_{t_0}(\tilde{y}) \iff y = \tilde{y}$, d'où le 1).
Comme $\mathbb{K}^2$ est de dimension 2, par isomorphisme, $\mathcal{S}_H$ l'est aussi, d'où le 1).

Proposition 19.

Notons $\mathcal{S}_L$ l'ensemble des solutions de (L).
Soit y_p une solution de (L). Alors $\mathcal{S}_L = \{y_p + q;\ q \in \mathcal{S}_H\}$ i.e. $\mathcal{S}_L$ est l'espace affine de dimension 2.

démonstration : y solution de $(L) \iff a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \iff a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = a(t)y_p'' + b(t)y_p' + c(t)y_p$
$\iff a(t)(y - y_p)'' + b(t)(y - y_p)' + c(t)(y - y_p) = 0 \iff y - y_p$ solution de (H)

IV.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

En posant $Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, toute équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' = ay' + by$ peut se réécrire matriciellement $Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} Z$, et l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0 = (r - r_1)(r - r_2)$ correspond au calcul des valeurs propres

Lorsque $\boxed{r_1 \neq r_2}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable, elle est semblable à $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$, y la première composante de Z est bien combinaison linéaire de $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$.

Lorsque $\boxed{r_1 = r_2}$ est racine double, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ est non diagonalisable, elle est semblable à $T = \begin{pmatrix} r_1 & 1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix}$, on obtient en faisant la méthode de variation des constantes que y est combinaison linéaire de $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto te^{r_1 t}$.

V. Spectre et comportement physique

$\leftrightarrows$ PC : comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A.
cf TD

VI. Méthode d'Euler

Méthode d'Euler (PCSI)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, U un ouvert de $I \times E$, (t_0, y_0) appartenant à U, et $f : U \subset I \times E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

On note $y : I \to E$ l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t) & = & f(t, y(t)),\ \forall t \in I \end{cases}$

Position du problème :

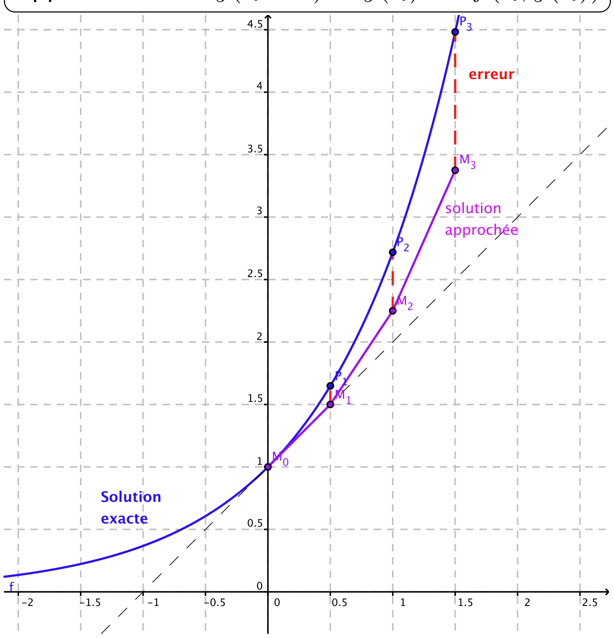
Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution y au problème de Cauchy, mais ne permet pas d'en trouver à partir de f une expression explicite.

On va construire une fonction explicite $\tilde{y}$ continue et affine par morceaux qui "approche" y (au sens de la norme infinie sur un segment), à l'aide d'un algorithme.

Algorithme de la méthode d'Euler

lemme 20. *Soit t_i un instant fixé, alors*
$y(t_i + \tau) \underset{\tau \to 0}{=} y(t_i) + \tau y'(t_i) + o(\tau)$, *i.e. :*
$y(t_i + \tau) \underset{\tau \to 0}{=} y(t_i) + \tau f(t_i, y(t_i)) + o(\tau)$

$\boxed{\text{Approximation : } y(t_i + \tau) \approx y(t_i) + \tau f(t_i, y(t_i))}$



On fixe un pas (temporel) τ, et un nombre d'itérations $N \in \mathbb{N}$, afin d'approcher y sur l'intervalle $[t_0,\ t_0 + N\tau]$, pendant la durée $D = N\tau$, à l'aide de $N+1$ valeurs approchées $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$.

- initialisation : $i = 0$

On pose $\tilde{y}_0 = y_0$, et $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$.
(y et $\tilde{y}$ coïncident en t_0)

- étape 1 : $i = 1$

On pose $t_1 = t_0 + \tau$, $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + \tau f(t_0, \tilde{y}_0)$ et
$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + (t - t_0)(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_0)$ pour $t \in I_1 =]t_0, t_1]$.
(erreur en $o(\tau)$ sur I_1).

- étape 2 : $i = 2$

On pose $t_2 = t_1 + \tau = t_0 + 2\tau$, $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \tau f(t_1, \tilde{y}_1)$ et
$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1 + (t - t_1)(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)$ pour $t \in I_2 =]t_1, t_2]$.
(erreur en $o(\tau) + \tau \| f(t_1, y_1) - f(t_1, \tilde{y}_1) \| = o(\tau) + \tau K o(\tau)$ sur I_2, en remarquant qu'il existe K tel que f soit K-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur U).

- $\cdots$

- étape N : $i = N$

On pose $t_N = t_{N-1} + \tau = t_0 + N\tau$, $\tilde{y}_N = \tilde{y}_{N-1} + \tau f(t_{N-1}, \tilde{y}_{N-1})$ et
$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_{N-1} + (t - t_{N-1})(\tilde{y}_N - \tilde{y}_{N-1})$ pour $t \in I_N =]t_{N-1}, t_N]$.
(erreur en $o(\tau) + \tau K o(\tau) + (\tau K)^2 o(\tau) + \cdots + (\tau K)^{N-1} o(\tau) = \dfrac{1}{1 - K\tau} \times o(\tau)$ sur I_N, par récurrence).

N.B. : En pratique, lorsque l'on souhaite approcher y pendant une durée D, on à le choix du pas τ (qui détermine N) :

— *Plus τ est petit, plus le calcul est précis (erreur faible), mais plus le temps de calcul est long (N est grand)*
— *Plus τ est grand, plus le calcul est rapide (N est petit), mais moins le calcul est précis (erreur en $o(\tau)$)*

Programme PC :

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, abordée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :

- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
- *la résolution explicite.*

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Systèmes différentiels	
Équation de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. ⇆ I : Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$.	Dimension de l'espace vectoriel des solutions.
Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable.	Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable. ⇆ PC : comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A.
b) Équations différentielles linéaires scalaires	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$. La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas des équations à coefficients constants.	On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé. Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$. La méthode de la variation des constantes est hors programme.