Table des matières

Pré-requis

Lois de première année, notations ensemblistes, vocabulaire des probabilités

Objectifs

Définir la notion de variable aléatoire discrète, à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable.

I. Modèles usuels

I.1 Formalisme des probabilités

Pour modéliser une expérience aléatoire, nous aurons besoin d'un "univers des possibles" Ω, soit fini, soit en bijection avec $\mathbb{N}$, de "probabilité" égale à 1.

L'ensemble des résultats aléatoires potentiels, appelé "tribu des évènements" $\mathcal{A}$, qui sera un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Chaque évènement $E \in \mathcal{A}$ représente ainsi une possibilité de l'univers des possibles, et on lui associera une valeur numérique, appelé "probabilité d'évènement" $\mathbf{P}(E)$ appartenant à $[0,1]$, ainsi l'application "probabilité $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ permet d'associer une valeur représentant son importance en termes d'incertitude.

Ainsi, on caractérise une expérience aléatoire par un triplet : "espace probabilisé" $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Remarque 1. Notons que pour de nombreux modèles, il sera commode de choisir $\Omega \subset \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

exemple 1. On jette un dé à 6 faces.

On considère $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$,

et la probabilité "d'équiréartition" $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}(\{1\}) = \cdots = \mathbf{P}(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$.

L'évènement $E_1 = \{1,3,5\}$ permet de décrire avec précision l'apparition d'un chiffre impair. L'évènement $E_2 = \{2,4,6\}$ permet de décrire avec précision l'apparition d'un chiffre pair.

$\Omega = E_1 \cup E_2$.

I.2 Ensembles dénombrables

Définition 1.

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

exemple 2. $2\mathbb{N} = \{2p;\ p \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

Définition 2.

Un ensemble est dit **fini** s'il est en bijection avec une partie bornée de $\mathbb{N}$.

exemple 3. $[\![1, m]\!]$ est fini.

Remarque 2. Remarque : attention : au lieu de dire "E est fini ou dénombrable infini", certains auteurs disent que E est "dénombrable" s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ vers E.

Remarque 3. Un ensemble dénombrable fini ou dénombrable infini peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 1.

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 2.

un produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

II. Mesure de probabilité sur un espace discret

II.1 Espace probabilisé discret

1.a) Tribu des évènements

Remarque : le vocabulaire ensembliste correspond à un vocabulaire probabiliste.

Définition 3.

Si Ω est un ensemble, on appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'**évènement contraire** $\overline{A} = \Omega \setminus A$ appartient à $\mathcal{A}$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la **réunion** $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Définition 4 (Evènement).

On appelle **évènements** tous les éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

Définition 5 (Evènement contraire).

Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est appelé **évènement contraire** de A (complémentaire dans Ω).

exemple 4. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$ est une tibu sur $\Omega = \{P, F\}$. Cela peut servir à modéliser un jet de pièce à pile ou face.

Remarque 4. L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Remarque 5. vocabulaire probabiliste ou vocabulaire ensembliste : incompatible ou disjoint

1.b) Loi de probabilité

Définition 6 (Evènements incompatibles)**.**

Deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements **incompatibles**,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Proposition 3 (passage au complémentaire)**.**

Pour tout A de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Proposition 4 (Evènements incompatibles)**.**

Si deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont **incompatibles** alors $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.

Définition 8.

On appelle **espace probabilisé** un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

II.2 Expériences aléatoires usuelles

2.a) Loi de Bernoulli de paramètre p

Expérience aléatoire : On tire une pièce de monnaie (équilibrée ou pipée), avec 1 le succès Face, 0 l'échec Pile.

Univers : $\Omega = \{0, 1\}$
Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
Probabilité : $\boxed{\mathbf{P}(\{1\}) = p \text{ et } \mathbf{P}(\{0\}) = 1 - p}$
Notation : $\boxed{b(p)}$, pour $p \in [0, 1]$.

2.b) Loi Uniforme sur $[\![1, N]\!]$

Expérience aléatoire : tirage équiprobable dans une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.
Univers : $\Omega = [\![1, N]\!]$
Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Loi de Probabilité : $\mathbf{P}(\{k\}) = \dfrac{1}{N}$, $\forall k \in [\![1, N]\!]$ et plus généralement : $\boxed{\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)},\ \forall k \in [\![1, N]\!]}$

Notation : $\mathrm{Unif}([\![1, N]\!])$, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

2.c) Loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$

Expérience aléatoire : On compte les succès (Face) en N tentatives simultanées et indépendantes de lancers de pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité p, 0 l'échec Pile de probabilité $1 - p$.
Univers : $\Omega = \{0, 1 \ldots, N\}$
Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Probabilité : $\boxed{\mathbf{P}(\{k\}) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k},\ \forall k \in [\![0, N]\!]}$
Notation : $\boxed{\mathcal{B}(N, p)}$

2.d) Loi Géométrique de paramètre p

Expérience aléatoire : On répète des tirages successifs indépendants d'une pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité p, 0 l'échec Pile de probabilité $1 - p$, jusqu'à obtenir un premier succès (Face), et on compte le nombre de tirages nécessaires.
Univers : $\Omega = \mathbb{N}^*$
Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Probabilité : $\boxed{\mathbf{P}(\{k\}) = p(1 - p)^{k-1},\ \forall k \in \mathbb{N}^*}$
Notation : $\boxed{\mathcal{G}(p)}$, pour $p \in [0, 1]$.

2.e) Loi de Poisson de paramètre λ

Expérience aléatoire : Elle peut servir à modéliser le nombre de désintégrations radioactives d'une quantité de matière donnée, pendant un intervalle de temps.
Univers : $\Omega = \mathbb{N}$
Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Probabilité : $\boxed{\mathbf{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!},\ \forall k \in \mathbb{N}}$
Notation : $\boxed{\mathcal{P}(\lambda)}$, pour $\lambda > 0$.

II.3 Autres exemples

II.4 Dé à 6 faces équilibré

Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Mesure de probabilité loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
$\mathbf{P}(\{\omega = k\}) = \frac{1}{6},\ \forall k \in \Omega$
Evènements : Le résultat est pair : $\{\omega = k;\ k \text{ pair}\} = \{\omega = 2\} \cup \{\omega = 4\} \cup \{\omega = 6\}$

II.5 Deux Dés à 6 faces équilibrés

Univers : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$
Mesure de probabilité loi uniforme sur $\{((i, j))_{1 \leq i,j \leq 6}\}$:
$\mathbf{P}(\{\omega = (i, j)\}) = \frac{1}{36},\ \forall (i, j) \in \Omega$
Evènements : La somme obtenue vaut 7 :
$E = \{\omega;\ \omega_1 + \omega_2 = k\} = \bigcup_{i=1}^{6} (\{\omega_1 = i\} \cap \{\omega_2 = 7 - i\})$, a pour probabilité $\mathbf{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

II.6 Main d'un jeu de 52 cartes

6.a) Cas d'une main à une carte

Univers : $\Omega = \{1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, \dots, 10\heartsuit, Va\heartsuit, Re\heartsuit, Ro\heartsuit, 1\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, \dots, 10\clubsuit, Va\clubsuit, Re\clubsuit, Ro\clubsuit,$ $1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, \dots, 10\diamondsuit, Va\diamondsuit, Re\diamondsuit, Ro\diamondsuit, 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, \dots, 10\spadesuit, Va\spadesuit, Re\spadesuit, Ro\spadesuit, \}$
Mesure de probabilité loi uniforme sur Ω :

6.b) Cas d'une main à cinq cartes

Univers : $\Omega' = \Omega^5$
Mesure de probabilité :
Si $\omega_1, \dots, \omega_5$ ne sont pas deux à deux distincts $\mathbf{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_5)\}) = 0$
Si $\omega_1, \dots, \omega_5$ sont deux à deux distincts $\mathbf{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_5)\}) = \binom{52}{5}$

II.7 Pile ou Face infini

Lancers de pièces consécutifs, Pile ou Face répété.
Univers : $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n \in \{0, 1\}\}$
$\mathbf{P}(\{\omega; \omega_i = a_i, \forall i \in [\![0, n-1]\!]\}) = \frac{1}{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (a_i) \in \{0, 1\}^n$
Evènements :
on obtient un pile : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{\omega_i = 0\} \right) \cap \{\omega_n = 1\} \right)$

III. Evènements et modélisation

III.1 Conditionnement et indépendance

1.a) Probabilités conditionnelles

Définition 9.

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de A **sachant** B le réel

$$\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$$

Notation $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$.

Proposition 5.

L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

démonstration : on a $\mathbf{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$
La propriété sur les réunions dénombrables résulte directement de celle de $\mathbf{P}$. $\square$

1.b) Indépendance d'évènements

Définition 10 (Indépendance de deux événements)**.**

Deux évènements A et B sont dits <u>**indépendants**</u> si $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)}$.

Remarque 6. Pour de tels évènements, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)$: la réalisation éventuelle de B n'influe pas sur celle de A.

Proposition 6.

Si $\mathbf{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

démonstration $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \iff \mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} \iff \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$ $\square$

exemple 5. Jeux de dés

Définition 11 (Indépendance 2 à 2 d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits <u>**deux à deux indépendants**</u> si
pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$

exemple 6. évènement A : pile au premier lancer

évènement B : pile au deuxième lancer

évènement C : les deux lancers donnent le même résultat

$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 0,5$

$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C \cap A) = 0,25$ les événements sont deux à deux indépendants.

$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0,25 \neq 0,5^3$. ils ne sont pas mutuellement indépendants

exemple 7. Une urne contient quatre jetons : un vert, un blanc, un rouge et un tricolore vert-blanc-rouge. On en tire un au hasard. On considère les trois évènements :

$V = \{\text{le jeton tiré contient du vert}\}$ $B = \{\text{le jeton tiré contient du blanc}\}$ $R = \{\text{le jeton tiré contient du rouge}\}$

On a $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(R) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$\mathbf{P}(V \cap B) = \mathbf{P}(tricolore) = \dfrac{1}{4} = \mathbf{P}(V)\mathbf{P}(B)$, donc V et B sont deux à deux indépendants, et idem pour B et R, ainsi que V et R.

Par ailleurs, $\mathbf{P}((V \cap B) \cap R)) = \dfrac{1}{4} \neq \mathbf{P}(V \cap B)\mathbf{P}(R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

Comme, $\mathbf{P}_{V \cap B}(R) = 1 \neq \mathbf{P}(R)$, car $V \cap B = \{tricolore\}$, la connaissance de la realisation simultanée de V et C modifie notre information sur R.

La notion d'indépendance deux à deux n'est donc pas suffisante pour traduire l'idée intuitive d'indépendance de plusieurs événements. Ceci motive la définition suivante.

Définition 12 (Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \dots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie J non vide de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Remarque 7. L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$!

1.c) Suite d'évènements

Proposition 7 (Formule des probabilités composées)**.**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

démonstration : par récurrence sur $n \geq 2$

exemple 8. Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que les deux premières soient blanches et que la troisième soit noire ?

$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) = \mathbf{P}(B_1)\ \mathbf{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbf{P}_{B_2}(\overline{B_3}) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{35}$

Définition 13 (Système complet dénombrable d'événements)**.**

Une famille dénombrable $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est dite **système complet dénombrable d'évé-nements si :** $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ **et,** $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

Remarque 8. On peut partitionner Ω en une réunion dénombrable d'évènements disjoints deux à deux.

Proposition 8 (Formule des probabilités totales)**.**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum_n \mathbf{P}(B\cap A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$$

démonstration :

On a $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(B\cap A_n)$ est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles.

Donc par définition de $\mathbf{P}$, on a $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(B\cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(B\cap A_n)$.

Or pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(A_n\cap B) = \mathbf{P}_{A_n}(B)\mathbf{P}(A_n)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 9. On adopte la convention $\mathbf{P}(B \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

Définition 14 (Evènements incompatibles)**.**

Deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont dits **incompatibles** si $A\cap B = \emptyset$.

Remarque 10. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_n) = 1$.

exemple 9. On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et : $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}_{A_3}(B) = \frac{1}{10}\times\frac{1}{3} + \frac{5}{10}\times\frac{1}{3} + \frac{6}{10}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

Proposition 9 (Formule de Bayes)**.**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B)>0$.
Alors

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_B(A_k)=\frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}{\mathbf{P}(B)}=\frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)}$$

démonstration : Par définition, $\mathbf{P}_B(A_k)=\dfrac{\mathbf{P}(A_k\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$

or $\mathbf{P}(A_k\cap B)=\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)$

Par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(B)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)$

D'où le résultat en faisant le quotient. □

exemple 10. Test viral. Un laboratoire propose un test de dépistage du virus Ebola.

Des études randomisées ont permis d'établir les statistiques suivantes :
- si le patient est sain, le test est négatif dans 99.8
- si le patient est malade, le test est positif dans 99.9

On sait d'autre part qu'il y a un animal malade sur 10000. Peut-on avoir confiance en ce test ? Pour cela, on déterminera :
a) la probabilité que le patient soit malade, sachant que le test est positif ;
b) la probabilité que le patient soit sain, sachant que le test est négatif.

a) $(M,\overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_P(M)=\frac{\mathbf{P}_M(P)\,\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}_M(P)\,\mathbf{P}(M)+\mathbf{P}_{\overline{M}}(P)\,\mathbf{P}(\overline{M})}=\frac{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000}}{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000}+\frac{1}{500}\frac{9999}{10000}}=\frac{111}{2333}\approx 4,76\%$$

b) $(M,\overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_{\overline{P}}(\overline{M})=\frac{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\,\mathbf{P}(\overline{M})}{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\,\mathbf{P}(\overline{M})+\mathbf{P}_M(\overline{P})\,\mathbf{P}(M)}=\frac{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000}}{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000}+\frac{1}{1000}\frac{1}{10000}}=\frac{9979002}{997903}\approx 99.99\%$$

Si le test est positif, la probabilité que le patient soit vraiment malade est très faible. Avec ce test, les patients déclarés malades sont en majorité sains, on ne peut donc pas avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est malade.

Par contre, si un patient est déclaré sain, on peut être sûr qu'il l'est avec une probabilité de 99,99%. On peut donc avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est sain.

III.2 Evènements "asymptotiques"

Proposition 10.

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathcal{A}.$$

Proposition 11 (Continuité croissante :)**.**

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

démonstration :

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $A_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. La suite $(\mathbf{P}(A_N))_N$ est donc croissante, et majorée par 1 donc converge.

Proposition 12 (Continuité décroissante :)**.**

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

démonstration : On passe au complémentaire $1-\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n^C)$ converge vers $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n^C\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Proposition 13 (Sous additivité :)**.**

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

démonstration : C'est vrai pour les sommes finies, donc à la limite lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

IV. Variable aléatoire discrète

IV.1 Evènements et valeurs numériques

On parlera également de <u>"variable aléatoire" X</u>, pour désigner une application $X : \Omega \to X(\Omega)$ prenant des valeurs dans $X(\Omega) = (x_i)$ et caractérisé par les probabilités $\mathbf{P}(\{X = x_i\})$.

exemple 11. On jette un dé à 6 faces. On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, et la probabilité "d'équiréartition" $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}(\{1\}) = \cdots = \mathbf{P}(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$.

La variable aléatoire $X : \omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ pair} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ impair} \end{cases}$ permet de décire avec précision l'apparition d'un chiffre pair ou impair lors d'un lancer de dé.

L'image de X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$, l'ensemble des valeurs possibles pour X.
$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$
$X^{-1}(\{0\}) = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{A}$
$X^{-1}(\{1\}) = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{A}$
$X^{-1}(\{0, 1\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{A}$

IV.2 Evènements correspondant à des valeurs prises par une variables aléatoire

Définition 15 (variable aléatoire)**.**

Une **variable aléatoire discrète** X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'**image** $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'("évènement") image réciproque $\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in U\} = X^{-1}(U)$ de toute partie $U \subset X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.

i.e. Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in U\} = \bigcup_{y \in U} \{X = y\}$ est un événement.

Notations : $(X \in U) = \{X \in U\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in U\}$.

exemple 12. Pour $\Omega = \{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2\}$, on peut définir une variable aléatoire $S : (i, j) \mapsto i + j$. Elle correspond à la somme de deux dés lancés "au hasard" : la terminologie variable aléatoire est un peu ancienne...

Définition 16 (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Si X est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **la loi de** X est la donnée des $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$ pour $k \in X(\Omega)$.
On la note $\mathbf{P}_X$, et on peut la définir comme suit :

$$\forall k \in X(\Omega),\ \mathbf{P}_X(\{k\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mathbf{P}(\{X = k\})$$

exemple 13. Pour $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la loi uniforme $\mathbf{P}$ et de la tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les singletons "couples" $\{(\omega_1, \omega_2)\}$, $S : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$

La loi $\mathbf{P}_S$ de S est donnée par :$\forall k \in [\![2, 12]\!],\ \mathbf{P}_S(k) = \dfrac{\#\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2;\ i + j = k\}}{36}$

IV.3 Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Théorème 14.

Si X prend ses valeurs dans $\{\ x_n\ ;\ n \geqslant 0\ \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration hors programme

Remarque 11. Parfois, il sera commode de choisir Ω pour que $X = \mathrm{id}_\Omega$.

IV.4 Variables aléatoires suivant une loi usuelle

4.a) Loi Bernoulli

Notation : $\boxed{X \hookrightarrow b(p)}$, pour $p \in [0,1]$.
valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{0,1\}$
loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $\boxed{\mathbf{P}_X(\{1\}) = p \text{ et } \mathbf{P}_X(\{0\}) = 1-p}$
Expérience aléatoire type :
C'est la loi du tirage d'une pièce de monnaie, en notant 1 le succès Face, 0 l'échec Pile.

4.b) Loi Poisson

Notation : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$, pour $\lambda > 0$.
valeurs prises par Y : $X(\Omega) = \mathbb{N}$
loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\boxed{\mathbf{P}_Y(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\ \forall k \in \mathbb{N}}$

Expérience aléatoire type : nombre de désintégrations radioactives d'une quantité de matière donnée, pendant un intervalle de temps.

4.c) Loi binomiale de paramètres N et p sous l'angle des variables aléatoires

Notation : $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)}$
valeurs prises par S : $S(\Omega) = [\![0,N]\!]$
loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$: $\boxed{\mathbf{P}_S(\{k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ \forall k \in [\![0,N]\!]}$
Probabilité sur Ω :

Univers : $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \{0,1\}^N\}$. Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on note X_i la variable aléatoire représentant le succès ou l'échec au i-ème lancer :
$X_i : \omega \longmapsto \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_i = 1 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$. On a bien $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, et $X_i \hookrightarrow b(p)$

Comme $\{S = k\} = \displaystyle\bigcup_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{0,1\};\ \sum_{i=1}^N \omega_i = k} \left(\bigcap_{i=1}^N \{X_i = \omega_i\}\right)$ est une réunion de $\binom{N}{k}$ évènements incompatibles, de probabilités respectives $p^k(1-p)^{N-k}$

On retrouve $S(\Omega) = [\![0,N]\!]$ et $\boxed{\mathbf{P}(\{\omega;\ S(\omega) = k\}) = \binom{N}{k} p^k(1-p)^{N-k},\ \forall k \in [\![0,N]\!]}$

4.d) Loi Géométrique de paramètre p sous l'angle des variables aléatoires

Notation : $G \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
valeurs prises par G : $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$
Loi $\mathbf{P}_G$ de G : $\boxed{\mathbf{P}_G(\{k\}) = p(1-p)^{k-1},\ \forall k \in \mathbb{N}^*.}$
On peut introduire pour $i \in [\![1,N]\!]$ la variable aléatoire X_i représentant le succès ou l'échec au i-ème lancer, définie par : $X_i : \omega \longmapsto \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_i = 1 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$ On a bien $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, et $X_i \hookrightarrow b(p)$.

Donc pour $G = \inf\{j;\ X_j = 1\}\ :\ \omega \longmapsto k$ si $\omega_k = 1$ et $\omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = 0$, on a bien $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et comme $\{\omega;\ G(\omega) = k\} = \{G = k\} = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}$, $\boxed{\mathbf{P}(\{\omega;\ G(\omega) = k\}) = p(1-p)^{k-1},\ \forall k \in \mathbb{N}^*}$

Programme PC :

Probabilités

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :
— *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*
— *maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.*

4.e) A- Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :
— *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*
— *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
b) Espace probabilisé	
Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que : 1. $\Omega \in \mathcal{A}$, 2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, 3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$. Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P}\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que : 1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 2. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés : — $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. — Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$ — Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$ — Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$	Notation $\mathbf{P}_B(A) = P(A \mid B)$. L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.
Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\ P(A_n)$$	On adopte la convention $\mathbf{P}(B \mid A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formule de Bayes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Indépendance de deux événements.	Si $\mathbf{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbf{P}(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

d') Généralités (sur les variables aléatoires)

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.	
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Si X prend ses valeurs dans $\{\ x_n\ ;\ n \geqslant 0\ \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance.	
Loi de Poisson de paramètre λ.	
$\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.	

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. $\leftrightarrows$ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme.