# Table des matières



# Pré-requis

# Objectifs

# I. Rappels de PCSI sur les espaces vectoriels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

## I.1 Rappels de PCSI : sous-espaces vectoriels

**Définition 1.**

Un ensemble $E$ est dit $\mathbb{K}$-**espace vectoriel**, pour les lois d'addition (interne) $+$ et de produit (externe)$\cdot$ si :

— $E$ **non vide**, et est stable pour la loi $+$, qui est commutative et associative, admet un élément neutre $0_E$, et tout élément $x$ de $E$ admet un opposé $-x$ tel que $x + (-x) = 0_E$

— $E$ est stable par multiplication à gauche par un scalaire par la loi $\cdot$, qui est distributive par rapport à l'addition, associative par rapport à la multiplication dans $\mathbb{K}$, admet pour élément neutre multiplicatif $1_{\mathbb{K}}$

**exemple 1.** $\mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i;\ d \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}$

**exemple 2.** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n};\ (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \right\}$.

*Remarque* 1. En pratique, pour montrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) d'un espace-vactoriel le contenant :

— **non vide** et contenu dans un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$ ...)

— **stable par combinaison linéaire** (i.e. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F$)

**exemple 3.** $\mathbb{R}_2[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i X^i;\ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}[X]$

**exemple 4.** $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ S \in\ \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ S^T = S \right\} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

## I.2 Rappels de PCSI : somme de deux s.-e.v.

**Définition 2.**

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F, G$ deux s-e.v. de $E$. On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels $F$ et $G$ le $\mathbb{R}$-e.v. noté $F + G$ défini par :
$F + G = \{f + g;\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ f \in F,\ g \in G\}$

**exemple 5.** $\mathbb{R}_1[X] = \left\{ a_0 + a_1 X;\ (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$

**exemple 6.** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

# I.3 Rappels de PCSI : sommes directes et supplémentaires

**Définition 3** (Sous-espaces supplémentaires).

Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ sont dits **supplémentaires** si : $E = F \oplus G$
i.e. si : $\forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G;\ x = f + g$

**Définition 4** (Somme directe).

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $F, G$ deux s-e.v. de $E$.
On dit que la somme $F + G$ de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :
$\forall (f,g) \in F \times G,\ (0_E = f + g \Rightarrow,\ f = g = 0_E)$.
Si tel est le cas, on note
$$F + G = F \oplus G$$

*Remarque* 2. Pour une somme directe $F \oplus G$ de s.e.v. de $E$, on a toujours $F \oplus G \subset E$

**Proposition 1** (C.N.S. de décomposition en somme directe).

Soient $F$ et $G$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $E = F \oplus G$

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$

*démonstration :* • Supposons i).
pour $x \in F \cap G$, on a $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$, donc par unicité de la décomposition, $0 = x$ (et $0 = -x$), donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est toujours vraie pour des s.-e.v. .

• Supposons ii).
l'existence de décomposition dans $F+G$ est automatique. Pour $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$ tels que $f_1+g_1+f_2+g_2$, on a $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$, donc $f_1 - f_2 = 0_E = g_2 - g_1$, d'où l'unicité de la décomposition dans $F + G$ : ainsi $F + G = F \oplus G$.
□

**exemple 7.** $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$, avec $\mathcal{I} = \{f;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ et $\mathcal{P} = \{g;\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x)\}$

**exemple 8.** $\mathfrak{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M;\ M^T = M\right\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{M;\ M^T = -M\right\}$

# II. Sommes de plusieurs espaces vectoriels

## II.1 Sommes sous-espaces vectoriels

**Définition 5.**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des s-e.v. de $E$. On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels $E_1, \dots, E_s$ le $\mathbb{R}$-e.v. noté $\sum_{i=1}^{s} E_i$ défini par :

$$\sum_{i=1}^{s} E_i = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_s;\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i \in E_i\}$$

**exemple 9.** $\mathbb{R}_4[X] = \left\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4;\ (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5\right\} = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$

**Proposition 2.**

Pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de $E$, $\sum_{i=1}^{d} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

*démonstration :* calcul direct pour $x = \sum_{i=1}^{s} x_i$, $y = \sum_{i=1}^{s} y_i$ et $\lambda$, on a $x + \lambda y = \sum_{i=1}^{s} (x_i + \lambda y_i)$. $\square$

*Remarque* 3. Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on note aussi $E_1 + E_2$ au lieu de $\sum_{i=1}^{2} E_i$.

## II.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

**Définition 6** (Somme directe).

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{s} E_i$ de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :

$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i,\ \left(0_E = \sum_{i=1}^{s} x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i = 0_E\right).$$

Si tel est le cas, on note

$$\sum_{i=1}^{s} E_i = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$$

**Définition 7** (Décomposition en somme directe).

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que $E$ est en **somme directe** de $E_1, \dots, E_s$ si :

$$\forall x \in E,\ \exists! (x_i)_{1\le i\le s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i;\ x = \sum_{i=1}^{s} x_i$$

Si tel est le cas, on note $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$

**exemple 10.** $\mathbb{R}_4[X] = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4;\ (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5\right\} = \bigoplus_{i=0}^{4} \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$
$= \mathbb{R}_1[X] \oplus \left\{(X^2 - 3X + 1)(a_0 + a_1X + a_2X^2);\ (a_0, \dots, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\}$

## II.3 Sommes directes et bases adaptées

**Définition 8** (Base adaptée à une somme directe).

Etant donnée $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions respectives $(d_i)_{1\le i\le s}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de $E$ est une **base adaptée** à cette somme directe si ses éléments sont dans cet ordre de la forme $((e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}), \dots, (e_{s,1}, \dots, e_{s,d_s}))$, avec pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ base de $E_i$.

**exemple 11.** $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}_3[X] = \bigoplus_{i=0}^{3} \mathrm{Vect}(X^i)$.

**exemple 12.** $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,
adaptée à la somme directe $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Vect}((X - a)^i)$.

**Proposition 3.**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension **finie**, $n \in \mathbb{N}$, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors $\boxed{\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i).}$

*démonstration :*

Pour tout $i$, on note $j_i = \dim(E_i)$, $M = \sum_{i=1}^{n} j_i$, et on se donne $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,j_i})$ une base de $E_i$. Il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_1)$ de $M$ vecteurs de $E$ est une base de $E$.

• <u>génératricité :</u> soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,k})_{1\leq k\leq j_i} \in \mathbb{K}^{j_i}$ tels que $x_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right)$. Ce pour tout $x$ appartenant à $E$, d'où $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

• <u>liberté :</u> soit $(\lambda_{i,k})_{1\leq k\leq j_i,\ 1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^M$ un $M$-uplet de scalaires tel que $\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right) = 0_E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $v_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ appartient à $E_i$, et comme la somme est directe, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0_E$ implique $v_i = 0_{E_i} = 0_E$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0_{E_i}$, et $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_i$ donc est libre, donc $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, j_i]\!]$. Finalement, $\forall 1 \leq k \leq j_i,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \lambda_{i,k} = 0_{\mathbb{K}}$, donc $\mathcal{B}$ est libre. □

**Proposition 4** (CNS de somme directe).

Etant donnés $p$ sous-espaces vectoriels $F_1, \dots F_p$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, on a : $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)}$

En outre, il y a égalité si est seulement si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

*<u>démonstration :</u>*

posons $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

En prenant des bases $\mathcal{B}_i$ des $F_i$, pour $i$ allant de $1$ à $s$, on obtient que la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$ est génératrice de $F = \sum_{i=1}^{s} F_i$, et possède $\sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)$ éléments, donc $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

• Si $\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = F$, la proposition précédente assure $\dim F = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

• Si $\dim F = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$, alors la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $F$ et a pour cardinal la dimension de $F$, donc est une base de $F$.

Comme elle est libre, toute décompostion d'un vecteur $x = \sum_{i=1}^{s} x_i$ dans la somme $\sum_{i=1}^{s} F_i$ peut être vue comme une décomposition unique dans la base $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$, quitte à redécomposer chaque composante $x_i \in F_i$ selon $\mathcal{B}_i$. On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{s} F_i$ est directe. □

*Remarque* 4. ainsi $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

# III. Matrices par blocs, sous-espaces stables

## III.1 Sous-espaces-stables par un endomorphisme

**Définition 9.**

Un sous-espace vectoriel $F$ de l'espace vectoriel $E$ est dit **stable** (ou invariant) par l'endomorphisme $u$ appartenant à $\mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, i.e. : $\forall v \in F,\ u(v) \in F$.

**Proposition 5.**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ stable par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors l'application $F \to F,\ v \longmapsto u(v)$ est un endomorphisme de $F$.

*démonstration :* la linéarité est directement issue de celle de $u$ sur $E$, et la stabilité assure le caractère endomorphisme. □.

**Définition 10.**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ stable par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit l'**endomorphisme induit** par $u$ sur $F$ ; noté $u_{|F}^{|F}$ par :
$\forall \overrightarrow{x} \in F,\ u_{|F}^{|F}(\overrightarrow{x}) = u(\overrightarrow{x})$

**Proposition 6.**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F$ est stable par l'endomorphisme $u$ si et seulement s'il existe $B, D$ telles que : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} Mat_{\mathcal{B}_f}(u_{|F}^{|F}) & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$

*démonstration :* directement : $F$ est stable par $u$ si etseulement si $u(\mathcal{B}_F) \subset F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_F)$.

**Proposition 7.**

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $u$.

*démonstration :*
Pour $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(u(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Pour $x \in E$ et $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, on a
$u(y) = u(u(x))$, donc $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$. □

**Proposition 8.**

Si $u \circ v = v \circ u$ (i.e. si $u$ et $v$ commutent), alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $v$.

*démonstration :* Pour $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Pour $x \in E$ et $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, on a
$v(y) = v(u(x)) = u(v(x))$, donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$. □

**exemple 13.** $f : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ avec trigonalisation, les $\mathbb{R}_i[X]$ sont stables.

## III.2 Matrices par blocs

Rappel : l'expression du coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$ de la matrice produit $R = MN$ de $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ est : $\boxed{(R)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} m_{i,k} n_{k,j}}$

Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix}$, avec $A, S \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B, T \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $C, U \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $D, V \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on peut calculer “par blocs” de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS + BU & AT + AV \\ CS + DU & CT + DV \end{pmatrix}$$

*Remarque* 5. Dans le cas de matrices “diagonales par blocs”, on a simplement :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS & 0 \\ 0 & DV \end{pmatrix}$$

# IV. Déterminants

## IV.1 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $2 \times 2$

**Définition 11.**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de $A$ le scalaire, noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ou encore $\det A$ défini par : $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$.

**Définition 12.**

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$. On appelle **mineur** d'indice $ij$ de $A$ le scalaire, noté $A_{ij}$ défini par : $\boxed{A_{ij} = a_{3-i,3-j}}$.

## IV.2 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $n \times n$

**Définition 13.**

Pour tout entier $n \geq 3$ on définit par récurrence le **déterminant** d'une matrice $n \times n$ en posant, pour tout $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1})$$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $A_{ij}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en rayant dans $A$ la ligne $i$ et la colonne $j$.

**Proposition 9** (dévpt. % à $j^{\text{ème}}$ colonne).

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

**Proposition 10** (dévpt. % à $i^{\text{ème}}$ ligne).

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det(A_{i\ell})$$

**exemple 14.** par rapport à la 1ère ligne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

**Proposition 11** (opération du pivot de Gauss sur les colonnes).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$, on ne change pas le déterminant en faisant une opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j$, pour des scalaires $(\lambda_j)_{j\neq j}$.

**Proposition 12** (multiplication d'une colonne par un scalaire).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$ et $B = (C_1|\dots|\lambda C_{i_0}|\dots|C_n)$ s'en déduit en faisant l'opération $C_{i_0} \leftarrow \lambda C_{i_0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$

**exemple 15.** $\det(\lambda I_n) = \lambda^n \det(I_n) = \lambda^n$.

**Proposition 13** (transposée).

Pour toute matrice carrée $A$, on a : $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

**Proposition 14** (CNS liberté).

Pour toute matrice carrée $A = (C_1|\dots|C_n)$.
$\det(A) \neq 0$ si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\det(A) \neq 0$ si et seulement $A$ est inversible (i.e. si l'endomorphisme canoniquement associé est bijectif)

## IV.3 Rappel : déterminant d'un produit

**Proposition 15.**

$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

*démonstration :* par récurrence sur la taille de $A$ et développements par rapports aux colonnes de $A$.

**Proposition 16.**

$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

*démonstration :* Pour $P$ inversible, $1 = \det(I_n) = \det(PP^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})$. $\square$

## IV.4 Déterminants triangulaires par blocs

**Proposition 17.**

Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on peut calculer "par blocs" de la manière suivante :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)}$$

*démonstration :* à $r \in \mathbb{N}^*$ fixé, on procède par récurrence sur $p \geq 1$.

- Le cas $p = 1$, est direct, par développement par rapport à la première colonne de toute matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & B \\ 0_{r,1} & D \end{pmatrix}$.
- Supposons la propriété vraie pour toute matrice triangulaire par blocs avec un bloc supérieur gauche de taille inférieure ou égale à $p \times p$.

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p+1} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathfrak{M}_{p+1,p+1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p+1,r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on obtient en développant par rapport à la première colonne : $\det(M) = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det M_{k,1} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det \begin{pmatrix} A_{k,1} & (\star) \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})\det(D) = \left(\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})\right)\det(D) = \det(A)\det(D)$. $\square$.

*Remarque* 6. Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

## IV.5 Matrices semblables

**Définition 14.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux matrices carrées $M$ et $N$ appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** (sur $\mathbb{K}$) , s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$

*Remarque* 7. Si $P$ est vue comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de $P$), $M$ et $N$ représentent un même endomorphisme $f$, avec $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, et $\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}\ Mat_{\mathcal{B}}(f)\ Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$

**Proposition 18.**

Si $M$ et $N$ sont deux matrices semblables, alors $\det(M) = \det(N)$.

*démonstration :* Pour $P$ inversible, $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$, donc
$\det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \det(M)\det(P^{-1})\det(P) = \det(M)$ $\square$

*Remarque* 8. la réciproque est fausse : $0_2$ n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Définition 15.**

Pour tout endomorphisme de $E$, on définit le déterminant de $u$, noté $\det(u)$ par :
$\boxed{\det(u) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))}$
où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de $E$.

En effet, pour toute autre base $\mathcal{B}'$, en notant $P = Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, on a :
$\det(mat_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(P^{-1}mat_{\mathcal{B}}(u)P) = \det(P^{-1}mat_{\mathcal{B}}(u)P) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))\det(P)\det(P^-1) = \det(mat_{\mathcal{B}}(u))$.

## IV.6 Vandermonde

**Définition 16.**

Soients $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde** le scalaire noté $V(a_1,\dots,a_n)$ défini par :

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**lemme 19.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\quad V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k) \times V(a_1,\dots,a_n)$

*démonstration :*

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On fait successivement et dans cet ordre, pour $k$ allant en décroissant de $n+1$ à 2, on fait $C_k \leftarrow C_k - a_{n+1}C_{k-1}$ :

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & (a_1-a_{n+1}) & a_1(a_1-a_{n+1}) & \dots & a_1^{n-2}(a_1-a_{n+1}) & a_1^{n-1}(a_1-a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & (a_{n-1}-a_{n+1}) & a_{n-1}(a_{n-1}-a_{n+1}) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_{n+1}) & a_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}-a_{n+1}) \\ 1 & (a_n-a_{n+1}) & a_n(a_n-a_{n+1}) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_{n+1}) & a_n^{n-1}(a_n-a_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2}(a_1-a_{n+1}) \times \dots \times (a_n-a_{n+1}) \times V(a_2,\dots,a_n,a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k) \times V(a_1,\dots,a_n)$$

en développant par rapport à la première ligne puis en factorisant en ligne. □

**Proposition 20** (déterminant de Vandermonde).

Soients $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$, $\boxed{V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)}$.

*démonstration :* par récurrence sur $n \geq 1$.

- L'initialisation est immédiate pour $n = 1$.
- supposons la propriété vraie au rang $n$.

On a :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_k) \times \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j - a_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j - a_i)\right) \times \prod_{j=1}^{n}(a_{n+1} - a_j) = \prod_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j - a_i)\right)$$

# V. Trace

## V.1 Définition

**Définition 17.**

Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$, on appelle **trace** de la matrice $A$ le nombre, noté $\mathrm{Tr}(A)$ défini par : $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}}$

## V.2 Propriétés

**Proposition 21** (linéarité de la trace).

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B)$

**Proposition 22** (trace de la transposée).

Pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\left(A^T\right) = \mathrm{Tr}(A)$

**Proposition 23** (trace d'un produit).

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

*démonstration :* Pour $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $AB = C = (c_{ik})$ et $BA = D = (d_{j\ell})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \mathrm{Tr}(BA) \qquad \square$$

*Remarque* 9. Attention, en général, $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ ; par exemple $\mathrm{Tr}(I_n^2) = n \neq \mathrm{Tr}(I_n)^2$ pour $n \geq 2$.

*Remarque* 10. Tr est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

**Proposition 24** (trace de matrices semblables).

Deux matrices semblables ont même trace.
i.e. : si $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifient $N = P^{-1}MP$, alors $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(M)$

*démonstration :* $\mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}M) = \mathrm{Tr}(I_nM) = \mathrm{Tr}(M)$ $\square$

*Remarque* 11. Si $P$ est vue comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de $P$), $M$ et $N$ représentent un même endomorphisme $f$, avec $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, on a $N = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Ainsi on obtient le même résultat en calculant le nombre Trace de la matrice correspondant à la matrice de $f$ dans une base quelconque. $N = P^{-1}MP$

**Définition 18.**

Etant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **trace** de $f$ le scalaire, noté $\mathrm{Tr}(f)$ défini par $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(mat_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de l'espace vectoriel $E$ de dimension finie.

# VI. Propriétés avancées

## VI.1 Produit fini d'espaces vectoriels

**Définition 19.**

Etant donnés $p$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on défini leur ensemble **produit** :
$\prod_{i=1}^{p} E_i = \{(v_1, \dots, v_p);\ \forall\ 1 \leq i \leq p,\ v_i \in E_i\}$

**Proposition 25.**

Etant donnés $p$ espaces vectoriels $(E_1, \dots, E_p)$ sur $\mathbb{K}$ leur produit $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +_\pi, \cdot_\pi\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les lois $+_\pi$ et $\cdot_\pi$ définies par :

$\forall (v_1, \dots, v_p), (w_1, \dots, w_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ (v_1, \dots, v_p) +_\pi (w_1, \dots, w_p) = (v_1 + w_1, \dots, v_p + w_p)$

$\forall (v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot_\pi (v_1, \dots, v_p) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_p)$

En outre, si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ $E_i$ est de dimension finie égale à $d_i \in \mathbb{N}^*$, alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension $\sum_{i=1}^{p} d_i$.

*démonstration :* la vérification des propriétés de $\mathbb{K}$-e.v. est directe à partir des structures de $\mathbb{K}$-e.v. des $(E_i, +, \cdot)$.
Pour la dimension, ilsuffit de remarquer qu'étant données des bases $\mathcal{B}_i = (e_{i,k})_{1 \leq k \leq d_i}$, la famille $\left(\left((\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, e_{i,k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-i})_{1 \leq k \leq d_i}\right)\right)_{1 \leq i \leq p}$ est libre et génératrice, et possède $\sum_{i=1}^{p} d_i$ éléments □

*Remarque* 12. Etant donnés $p$ sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ d'un même espace vectoriel $E$, l'application $\varphi : \prod_{i=1}^{p} E_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i;\ \varphi(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} v_i$ définie par est une application linéaire.

Comme $\dim(\prod_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) \geq \dim(\sum_{i=1}^{p} E_i)$

Elle est bijective ssi $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_i) = \dim(\sum_{i=1}^{p} E_i)$, d'après le théorème du rang.

Comme la bijectivité de $\varphi$ est équivalente à l'unicité des décomposition dans la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$, cela permet de redémontrer la C.N.S. de somme directe, pour une somme de $p$ sous-espaces vectoriels.

Programme PC :

# Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

*Le programme est organisé autour de trois objectifs :*
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;*
- *passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.*

*Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Produit et somme d'espaces vectoriels** | |
| Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. | |
| Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires. | |
| Base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ ; base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$. | Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base. |
| Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. | |
| **b) Matrices par blocs et sous-espaces stables** | |
| Matrices définies par blocs, opérations. | |
| Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. | Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs. |
| Si $u$ et $v$ commutent, le noyau et l'image de $u$ sont stables par $v$. | |
| **c) Déterminants** | |
| Exemples de déterminants. | Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde. <br> ⇆ I : calcul du déterminant d'une matrice. |
| **d) Matrices semblables et trace** | |
| Matrices semblables. | La notion de matrices équivalentes est hors programme. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
| --- | --- |
| Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.<br>Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. | |