Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Rappels de PCSI

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I.1 Rappels de PCSI : sous-espaces vectoriels

Définition 1.

Un ensemble E est dit $\mathbb{K}$-**espace vectoriel**, pour les lois d'addition (interne) $+$ et de produit (externe)$\cdot$ si :

— E **non vide**, et est stable pour la loi $+$, qui est commutative et associative, admet un élément neutre 0_E, et tout élément x de E admet un opposé $-x$ tel que $x + (-x) = 0_E$
— E est stable par multiplication à gauche par un scalaire par la loi $\cdot$, qui est distributive par rapport à l'addition, associative par rapport à la multiplication dans $\mathbb{K}$, admet pour élément neutre multiplicatif $1_{\mathbb{K}}$

exemple 1. $\mathbb{R}[X] = \left\{ \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i;\ d \in \mathbb{N}, (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}$

exemple 2. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n};\ (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \right\}$.

Remarque 1. En pratique, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) d'un espace-vactoriel le contenant :

— **non vide** et contenu dans un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$ ...)
— **stable par combinaison linéaire** (i.e. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F$)

exemple 3. $\mathbb{R}_2[X] = \left\{ \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_i X^i;\ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}[X]$

exemple 4. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ S^T = S \right\} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

I.2 Rappels de PCSI : normes

Définition 2.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** si :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \ge 0$ (positivité) ;
ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;
iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;
iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

I.3 Rappels de PCSI : produit scalaire

Définition 3.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$ si
$\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z >=< x; y > +\lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z >=< x; z > +\lambda < y; z >$

Définition 4 (Produit scalaire).

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{symétrique}}$
(i.e. $\forall v, w \in E, < w; v >= < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$

iii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{positive}}$ (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{définie}}$ (i.e. $\forall v \in E, (< v; v >= 0 \ \Rightarrow v = 0_E)$) ;

exemple 5. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :
$< x; y >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, produit scalaire euclidien canonique (p.s. usuel)

exemple 6. Pour $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on pose :
$< f; g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$, produit scalaire sur E.

I.4 Rappels de PCSI : norme associée à un produit scalaire

Définition 5.

Si $< \bullet; \bullet >$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\| \ \| :\ x \mapsto \sqrt{< x; x >}$ est
la **norme associée**

Proposition 1 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $< \ ; \ >$ et $\| \ \|$ la norme associée.
L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

démonstration : la positivité et le caractère séparé de la norme découlent directement de la positivité et du caractère défini du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité.
Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. $\square$

Proposition 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $<\bullet;\bullet>$. Alors $\boxed{\forall (u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\leq \sqrt{<u|u>}\sqrt{<v|v>}}$
en particulier, si $\|\ \|\ : x\ \mapsto \sqrt{<x|x>}$, on a : $\boxed{\forall (u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\ \leq\ \|u\|\ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :
Soient $x,y\in E$ fixés. On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto <x+ty,x+ty>$.
a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :
$\forall t,\ \ f(t)=<x|x>+<ty|x>+<x|ty>+<ty|ty>=<x|x>+2<x|y>t+<y|y>t^2$.
b) $<\ |\ >$ est positive, donc pour tout $t\in\mathbb{R},\ f(t)\geq 0$.
c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur $\mathbb{R}$).
$\Delta\leq 0\iff [2<x|y>]^2-4<y|y><x|x>\leq 0\iff 4<x|y>^2\leq 4<y|y><x|x>$
$\iff |<x|y>|\leq\sqrt{<y|y>}\sqrt{<x|x>}$, car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.5 Rappels : base orthogonale

Définition 6 (B.O.N.).

Une famille $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E est dite **base orthonormée** si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ <e_i|e_j>=\delta_i^j=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{array}\right.$$

Proposition 3 (expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_je_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=<e_i|x>=<x|e_i>}$$

$$\boxed{<x|y>=\sum_{k=1}^n x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}$$

dém : $x_1, \dots, x_n$ sont les les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $< x|e_i >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k | e_i >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k|e_i >= x_i \|e_i\|^2 = x_i$.

On a :

$$< x|y >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k | \sum_{m=1}^{n} y_m e_m >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} x_k y_m < e_k|e_m >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En particulier, si $y = x$, on a $\|x\|^2 =< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $\square$

Remarque 2. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le calcul de $< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^T Y = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) \in \mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

I.6 Projection orthogonale sur un s.e.-v.

Définition 7 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^\perp$
défini par :
$F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Proposition 4 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie).

Soit $(E, <\ |\ >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et F un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$; il est noté $y = P_F(x)$ et est appelé **projeté orthogonal** de x sur F.

En outre, si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base **orthonormale de F**, alors $\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j|x > u_j.}$

démonstration : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de F.
analyse : Soient $x \in E$ et supposons qu'il existe un vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Comme $y \in F$, $\exists!(\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$; $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Puisque $x - y \in F^\perp$, pour tout $z \in F$, on a $< z; x - y >= 0$. En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $< u_j|x - y >= 0$ (1).
(1) $\iff < u_j|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i >= 0 \iff < u_j|x > - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < u_j|u_i >= 0 \iff \lambda_j =< u_j|x >$, car $\mathcal{B}$ est orthonormale.

On a donc nécessairement $y = \sum_{i=1}^{n} < u_i|x > u_i$ (2).

synthèse : soit y donné par (2). On a $y \in F$. Par ailleurs, soit $z \in F$. Il existe $(\mu_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$; $z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.

D'où $< x-y|z >=< x-y| \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i >= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ (< x|u_i > - < y|u_i >) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ (< x|u_i > - < u_i| \ < x|u_i > u_i >) = 0$.
Donc $\forall z \in F, \ < x-y|z >= 0$, donc y convient. □

I.7 Construction de bases orthogonales

Proposition 5 (Algorithme de $\boxed{\textit{Gram-Schmidt}}$).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de vecteurs de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

En posant, $\boxed{g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1}$,

puis, pour i allant de 2 à n, $\boxed{g_i' = f_i - p_{F_{i-1}}(f_i) = f_i - \sum_{\ell=1}^{i-1} < g_\ell|f_i > g_\ell \text{ puis } g_i = \frac{1}{\|g_i'\|} g_i'}$,

la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (g_1, \ldots, g_n) \text{ est une base orthonormée}}$.

En outre $\forall \ 1 \leq i \leq n, \ \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

démonstration :

E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $< \, ; \, >$, et $\| \ \|$ la norme associée.
On montre par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ la propriété
$\mathcal{P}_k$:
« en posant, $e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$, et pour i allant de 2 à k, $e_i' = f_i - \sum_{k=1}^{i} < e_k|f_i > e_k$ puis $e_i = \frac{1}{\|e_i'\|} e_i'$,
la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormale de $F_k = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$. »

initialisation : $F_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ est une droite vectorielle de E, et f_1 est un vecteur non nul de F. Donc $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ est unitaire et $F = \mathbb{R} e_1$.
hérédité : supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
F_{k+1} est un s-.e.v. de E de dimension $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormé de F_k

Pour $j \in [\![1, k]\!]$, $< e_j'|e_{k+1}' >=< e_j|[f_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell] >$

$$=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} >< e_j|e_\ell >=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > \delta_j^\ell =< e_j|f_{k+1} > - < e_j|f_{k+1} >= 0$$

donc $e_{k+1}' \perp F_k$, et la famille $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}')$ est orthogonale.

Par ailleurs, comme la famille $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ est libre, et que $\sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, on ne peut pas avoir $e_{k+1}' = 0_E$, donc $e_{k+1} = \frac{1}{\|e_i'\|} e_i'$ existe et est unitaire.

Ainsi, d'après ce qui précède, la famille $\mathcal{F}_{k+1} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ est une famille orthonormale, donc libre.
Par construction, $F_{k+1} = F_k \oplus \mathrm{Vect}(f_{k+1})$, et $\mathcal{F}_{k+1}$ est contituée de $k+1$ vecteurs de F_{k+1} de dimension $k+1$, donc en est une base orthonormale, ce qui montre la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$. □

exemple 7. Pour $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on pose :
$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t}$, la norme 2, associée au produit scalaire usuel.

II. Normes en dimension finie

II.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$.

On se place dans le cas ou $E = \mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

exemple 8. L'application $\| \ \|_\infty : x \longmapsto \max\{|x_i|, \ 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :
La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéïté est directe.
$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], \ |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$
Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, \ 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
D'où le résultat. □

exemple 9. L'application $\| \ \|_1 : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme** 1.

dém :
La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.
$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], \ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$
Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$
Pour $x, y \in E$, on a : $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$, donc $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$
D'où le résultat. □

exemple 10. L'application $\| \ \|_2 : x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

II.2 Comparaison de normes en dimension finie

Définition 8.

Deux normes N et $\tilde{N}$ sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists (D,G) \in \mathbb{R}_*^+; \ \forall x \in E, \ G \ \tilde{N}(x) \leq N(x) \leq D \ \tilde{N}(x)$$

exemple 11. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Théorème 6 (Admis).

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** n.
Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur E, alors elles sont équivalentes.

exemples : $B(a,0) = \emptyset$, $B_f(a,0) = \{a\}$, $B(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| < 1\}$ est dite « boule unité »ouverte, $B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée.

Remarque 3. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\| \ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

III. Boules

III.1 Boule fermée

Définition 9.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par : $\boxed{B(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| \leq r\}}$

exemples : $B_f(a,0) = \{a\}$,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée de centre a.

Remarque 4. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\| \ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

III.2 Parties bornées

Définition 10.

Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \|x\| \leq M$$

exemple 12. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 4\}$ est borné (par 2 pour la norme euclidienne usuelle)

Définition 11.

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Une application $f : E \to F$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \ \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq M$$

exemple 13. $f : E \to \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{-\|x\|_E}$

III.3 Boule ouverte

Définition 12.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par : $\boxed{B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}}$

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité »ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée.

Remarque 5. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\| \ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

IV. Limites, continuité

IV.1 Définition

1.a) Limite d'une suite

Définition 13.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $L \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \|U_n - L\| \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas, on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

Remarque 6. En dimension finie, en notant $\| \ \|_\infty : X \mapsto \max\limits_i |x_i|$ la norme infinie, cela revient à :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \|X_n - L\|_\infty \leq \varepsilon}$

Comme toutes les normes équivalentes (dim finie), cette notion de limite quantifiée s'étend pour toute autre norme sur $\mathbb{R}^p$:

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \|X_n - L\|_F \leq \varepsilon}$

1.b) Limite d'une fonction en un point adhérent

Définition 14.

Soit Δ une partie de E. Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Définition 15 (Limite).

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à Δ. Une application $f : E \to F$ **admet une limite** L en A si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall X \in \Delta, \ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - L\|_F \leq \varepsilon}$

Si tel est le cas on note cela $\lim\limits_{X \to A, \ X \in \Delta} f(X) = L$ ou $f(X) \xrightarrow[X \to A]{} L$

1.c) Continuité d'une fonction

Définition 16 (Continuité).

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à Δ.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** en A si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall X \in \Delta, \ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon}$

Définition 17.

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$

exemple 14. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

V. Propriétés

V.1 Limites

Théorème 7 (limite et coordonnées).

Dans E e.v.n. de dimension **finie** égale à p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \Longleftrightarrow \left(\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n,i} = \ell_i\right)$,
où l'indice i désigne la $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

démonstration : comme $\| \ \|$ est équivalente à $\| \ \|_\infty$, on obtient le résultat. □

Définition 18 (limite en dimension finie).

On dit qu'une suite $(X_n(x_{n,1}; \dots ; x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $F = \mathbb{R}^p$ converge vers $L(\ell_1; \dots ; \ell_p)$ si :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_i$$

exemple 15. La suite $(U_n) = ((1 + 1/n)^n, \sin(1/n))$ converge vers $(\mathrm{e}, 0)$.

Notation 1. *Lorsqu'une suite vectorielle (X_n) converge vers une limite L, on note cela :* $\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L}$

V.2 Propriétés

Proposition 8.

Toute suite convergente est bornée.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : toutes les composantes sont bornées.

Proposition 9.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : cela est vraie pour toutes les composantes.

exemple 16. Suite de matrices

Proposition 10 (opérations sur les limites).

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda X + Y$

démonstration : on se ramène au cas réel pour les composantes.

Remarque 7. Idem pour les limites infinies et les théorèmes sur les cas d'indétermination de limites restent inchangés sur les composantes.

V.3 Limite d'une fonction

3.a) Limite d'une fonction de la variable réelle

Soit I un intervalle réel non vide. On note $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 19.

On dit qu'une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ **admet une limite** vectorielle ℓ en $a \in I$ si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon}$

Remarque 8. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\| \ \|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !
On note cela également $f(x) \xrightarrow[x\to a,\ x\in I]{} \ell$

3.b) Limite séquentielle

Proposition 11.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : elles sont toutes équivalentes ! □

Proposition 12 (Caractérisation séquentielle).

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \in E$,$\ell \in F$ et $f : E \to F$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{X\to A} f(X) = \ell$
2. Pour toute suite $(X_n) \in E^n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = \ell$.

démonstration :

• $1) \Rightarrow 2)$:
Supposons 1). Pour (X_n) une suite qui converge vers A.
Soit $\varepsilon > 0$; on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall X \in D,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$

Mais comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \|X_n - A\|_E \leq \eta$, on obtient :
$\forall n \geq N,\ \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = \ell$

• $1) \Rightarrow 2)$: On va démontrer la contraposée :
« NON $f(X) \xrightarrow[X\to A]{} \ell$ »$\Rightarrow$ « il existe une suite (X_n) convergente vers A telle que $(f(X_n))$ ne converge pas vers ℓ »

Supposons que $f(X)$ ne tend pas vers ℓ lorsque $X \to A$. En niant la définition de limite, on obtient l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in D;\ [\|X - A\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(X) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

En particulier, on posant $\eta = \dfrac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists X_n \in E;\ [\|X_n - A\|_E \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(X_n) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

Mais alors la suite (X_n) converge vers A, alors que la suite $f(X_n)$ ne peut converger vers ℓ. □.

V.4 Opérations sur les limites

Proposition 13.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b, c \in F$.
Si $f(X) \xrightarrow[X\to a]{} b$ et si $g(X) \xrightarrow[X\to a]{} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda\, g(X) + f(X) \xrightarrow[X\to a]{} \lambda\, c + b$$

<u>démonstration :</u> OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes □

Proposition 14.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b \in F$, $c \in G$.
Si $f(X) \xrightarrow[X\to a]{} b$ et si $g(Y) \xrightarrow[Y\to b]{} c$, alors

$$g(f(X)) \xrightarrow[X\to a]{} c$$

<u>démonstration :</u> OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes □

VI. Continuité

VI.1 Continuité en dimension finie

Remarque 9. Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions **finies**, alors $\|\ \|_E$ est équivalente à $\|\ \|_{E,\infty}$ et $\|\ \|_F$ est équivalente à $\|\ \|_{F,\infty}$.

En particulier, il existe deux constantes $K > 0$ et $C > 0$ telles que :
$\forall x \in E,\ \|x\|_{E,\infty} \leq K\|x\|_E$ et $\forall y \in F,\ \|y\|_{F,\infty} \leq C\|y\|_F$

Donc si f de $(E, \|\ \|_E)$ vers $(F, \|\ \|_F)$ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant η' associé à $\varepsilon' = \varepsilon/C$, on a :

si $\|X-A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K$, alors $\|X-A\|_{E} \leq \eta$, donc $\|f(X)-f(A)\|_{F,\infty} \leq C\|f(X)-f(A)\|_{F} \leq \varepsilon$
Ainsi $\|X-A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K \Rightarrow \|f(X)-f(A)\|_{F} \leq \varepsilon$
On en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 15.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, (x_1,\dots,x_p) \to (f_1(x_1,\dots,x_p);\ \dots;\ f_n(x_1,\dots,x_p))$, et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ ses composantes.
Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

<u>démonstration :</u> le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i|$

exemple 17. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

VI.2 Continuité d'une fonction de la variable réelle

Cas particulier : Soit I un intervalle réel non vide. On note $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 20.

Une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite **<u>continue</u>** en $a \in I$ si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \leq \varepsilon}$

Remarque 10. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\|\ \|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !
f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to a,\ x\in I]{} f(a)$

Définition 21.

Une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite **<u>continue</u>** sur I si elle est continue en tout point de I

exemple 18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 16 (continuité et composantes).

$f : I \to \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1,\dots,f_n : I \to \mathbb{R}$ le sont.

VI.3 Fonctions usuelles

Proposition 17.

Toute composée d'applications continues est continue.

Définition 22.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite k-**lipschitzienne** si :
$\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

i.e. : les images « s'éloignent »au plus d'un facteur k.

Définition 23.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k telle qu'elle soit k-lipschitzienne

exemple 19. l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{Arctan} x$, est 1-lipschitzienne, car :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\ \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leq \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left\{\dfrac{1}{1+t^2}\right\} |y - x|$, d'après l'inégalité des accroissements finis.

exemple 20. l'application $\|\ \ \|_E : E \to \mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne, car $\forall x, y \in E,\ |\|y\|_E - \|x\|_E| \leq \|y - x\|_E$

Théorème 18.

Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E.

démonstration :
Soit $a \in E$ fixé, montrons que f est continue en a. Soit $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Le cas $k = 0$ est trivial. supposons $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on a alors :

$$\forall x \in E, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\eta = \varepsilon$$

Ce qui montre la continuité de f en a $\square$.

Définition 24.

On appelle application polynomiale toute application de la forme $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{j=0}^{d}\Big(\sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=j} a_{i_1,\ldots,i_n}\Big)x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$.

Théorème 19.

Toute application polynomiale $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration :
Toute fonction monôme $M : (x_1, \ldots, x_n)$ est un produit de fonctions continues, donc est continue. $\square$