

Table des matières

I. Continuité, dérivées partielles d'ordre 1	3
I.1 Continuité	3
I.2 Définition, la classe $\mathcal{C}^1$	3
I.3 Propriétés	4
I.4 Réécritures différentielles	7
I.5 Composition	8
5.a) Règle de la chaîne	8
5.b) Lignes de niveau planes	8
5.c) Dérivées partielles de fonctions composées	10
II. Recherche d'extremums	10
II.1 Extremums locaux ou globaux	11
II.2 Parties fermées	12
II.3 Théorème des bornes atteintes	12
III. Dérivées partielles d'ordre 2	12
III.1 Définition	12
III.2 Propriétés	13
IV. EDP	13
IV.1 E.D.P. d'ordre 1	13
IV.2 E.D.P. d'ordre 2	14
IV.3 E.D.P. issues de la physique	15
IV.4 résolution d'E.D.P. via changement de variables	15
4.a) Utilisation de changement de variables affines	15
4.b) Utilisation des coordonnées polaires	16
V. Compléments	17
V.1 Rappels Normes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	17
V.2 Normes sur un $\mathbb{R}$ -e.v.	17
V.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$	17
V.4 Distance	18
V.5 Boules	19
5.a) Boules ouvertes	19
5.b) Boules fermées	19
V.6 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	19
V.7 Limite d'une fonction	19
V.8 Continuité	20
V.9 Cas particulier : fonction de la variable réelle	21
V.10 Fonctions usuelles	21
V.11 Intérieur, Adhérence, Frontière	22
V.12 Boules ouvertes	22
V.13 L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert	23

Pré-requis

Objectifs

Introduction

Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}$ est une surface de $\mathbb{R}^3$.
De nombreux problèmes à plusieurs variables peuvent ainsi être représentés.

I. Continuité, dérivées partielles d'ordre 1

Cadre soient p un entier appartenant à $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^p$.
On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$

I.1 Continuité

On note $\| \cdot \|_\infty : X \mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$ la norme infinie sur $E = \mathbb{R}^p$ et $\| \cdot \|_2 : X \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ la norme euclidienne sur $E = \mathbb{R}^p$
On a pour tout vecteur $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{p} \|X\|_\infty$

Définition 1 (Continuité).

Soit U une partie non vide de E et A un point de U .
Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall X \in U, \|X - A\| \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$$

remarque : le résultat ne change pas si on a pris la norme infinie

I.2 Définition, la classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.

Soit a un point de E , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa j^{me} coordonnée x_j si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h\vec{e}_j) - f(a))$$

Si tel est le cas on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ la valeur de cette limite.

Notation 1. Dans le cas d'une application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1, a_2 + h, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1, a_2, a_3 + h) - f(a_1, a_2, a_3)) \end{aligned}$$

Définition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E . Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si ses applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 4.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Remarque 1. On adapte pour $E = \mathbb{R}^2$

Notation 2. On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

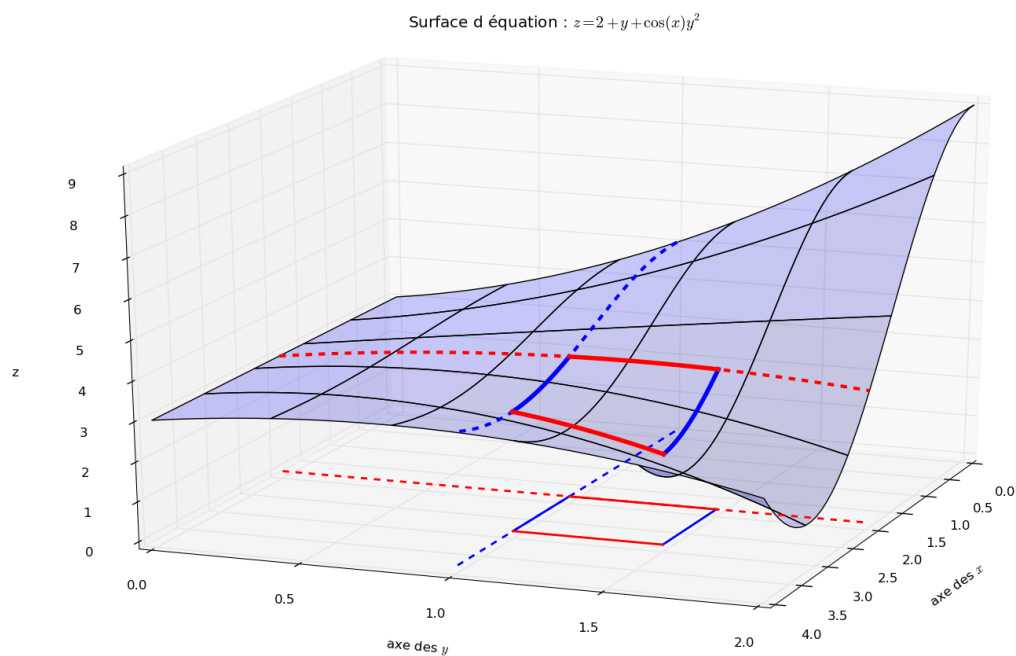
Remarque 2. On pourrait généraliser la notation à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ pour des fonctions à valeurs vectorielles dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

I.3 Propriétés

exemple 1. Soit $f : (x, y) \mapsto 3 + y + y^2 \cos(x)$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y^2 \sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + 2y \cos(x)$$



Proposition 1 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|\vec{h}\|_2)$$

démonstration (non exigible) : dans le cas $p = 2$ et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.

On pose $f_{\cdot, a_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f_{\cdot, a_2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$f_{\cdot, a_2}(a_1 + h_1) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f_{\cdot, a_2}(a_1) + h_1 \frac{df_{\cdot, a_2}}{dx_1}(a_1) + o(h_1)$$

ou encore

$$f(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (1)$$

De même on pose $f_{a_1 + h_1, \cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_2 \mapsto f(a_1 + h_1, x_2)$ et on obtient :

$$f_{a_1 + h_1, \cdot}(a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f_{a_1 + h_1, \cdot}(a_2) + h_2 \frac{df_{a_1 + h_1, \cdot}}{dx_2}(a_2) + o(h_2)$$

ou encore

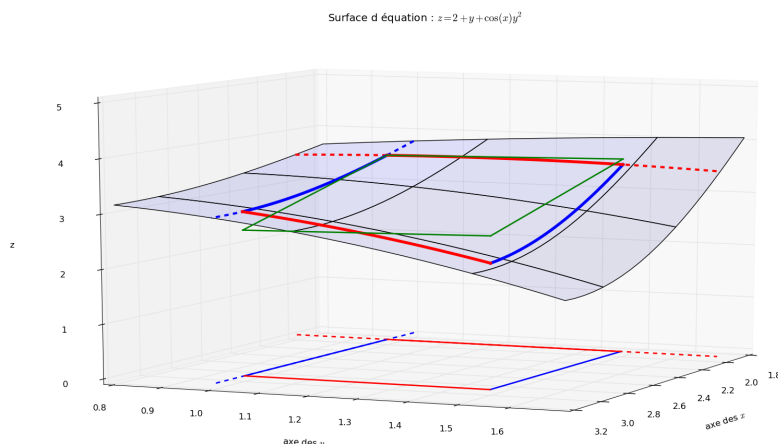
$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1 + h_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) + o(h_2) \quad (2)$$

Or par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (3)$$

Mais alors, d'après (1), (2), (3), on a

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right) \quad (4)$$



Corollaire 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I.4 Réécritures différentielles

Définition 5.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle
(vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix}$ dans
la base canonique.

Proposition 4 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$,
on a avec la notation $(\mid)$ pour le produit scalaire usuel :
$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + (\nabla f(a) \mid \vec{h}) + o\left(\|\vec{h}\|_2\right)$$

Définition 6.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle
différentielle de f en a l'application linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, noté $df(a)$, définie par :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Notation 3. Le terme $\sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est parfois noté $df(a) \bullet \vec{h}$ et est égal à $(\nabla f(a) \mid \vec{h})$.

Remarque 3. En physique, pour une fonction $(p, T) \mapsto S(p, T)$, on écrit parfois « $dS = \frac{\partial S}{\partial p} dp + \frac{\partial S}{\partial T} dT$ » pour désigner l'approximation à l'ordre 1 :

$$S(p_0 + \delta p, T_0 + \delta T) - S(p_0, T_0) \underset{\delta \rightarrow 0, \delta p \rightarrow 0}{=} \frac{\partial S}{\partial p}(p_0, T_0) \delta p + \frac{\partial S}{\partial T}(p_0, T_0) \delta T + o(\sqrt{\delta p^2 + \delta T^2})$$

Proposition 5 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \bullet \vec{h} + o(\|\vec{h}\|_2)$$

I.5 Composition

5.a) Règle de la chaîne

Proposition 6 (règle de la chaîne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle ouvert, $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\{x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)); t \in I\} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt}(f(x_1(t), \dots, x_p(t))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t)) \frac{dx_p}{dt}(t)$$

démonstration : On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0 \quad (5)$$

et pour $a = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h))_{1 \leq i \leq p}$:

$$f(a + \delta) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \delta_i \quad (6)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{h}(f(x(t+h)) - f(x(t))) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t). \quad \square$$

Remarque 4. En physique, on note $V = f \circ x$ et la dérivée par rapport à t est $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_p}x'_p(t)$.

5.b) Lignes de niveau planes

Définition 7.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane, paramétrée par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ alors la tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Proposition 7 (le gradient est orthogonal aux lignes de niveau).

Si $\mathcal{L}_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = K\}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = K$, pour $K \in \mathbb{R}$ constante fixée, alors pour tout point M de $\mathcal{C}$, et pour tout vecteur $\vec{T}_M$ tangent à la courbe en M , on a $\nabla f(M) \perp \vec{T}_M$.

démonstration : On peut paramétrer la ligne de niveau K par : $\mathcal{L}_K = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$, pour un intervalle réel I , et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

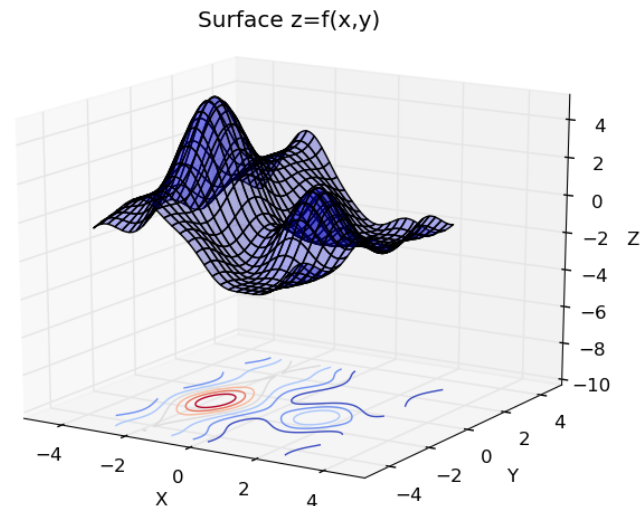
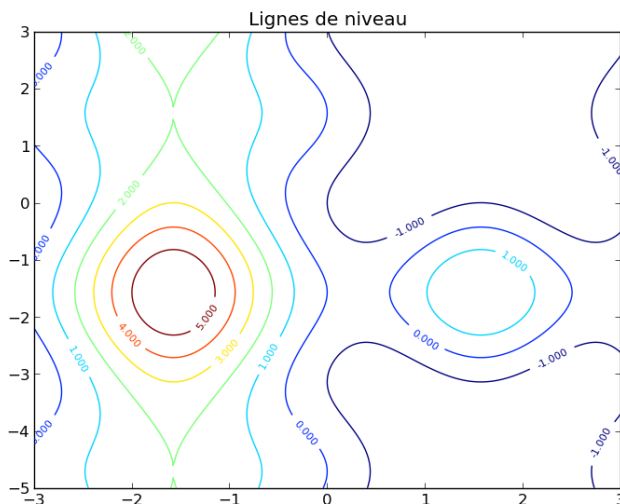
Comme pour tout $t \in I$, $K = f(x(t), y(t))$, en dérivant on obtient :

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t),$$

d'où $\left\langle \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(M) \right\rangle = 0$, le vecteur vitesse $\vec{T}_M$ étant le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ $\square$

Remarque 5. En physique, on dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau (équipotentielles), et orienté selon les valeurs croissantes de f , en tout point où il est non nul.

exemple 2. $z = f(x, y) = -2 + (1 - \sin(x))^2 + (\sin(y) - \sin(x))^2$



Remarque 6. Pour un relief paramétré par $z = f(x, y)$, le vecteur $\nabla f((x, y))$ dirige la plus grande pente au point $M(x, y, f(x, y))$ de la surface : en effet, la variation de $f(x(t), y(t)) - f(x_M, y_M)$ est maximale lorsque le terme d'ordre 1 $\left\langle \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(x_M, y_M) \right\rangle$ est maximal, ce qui correspond au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

5.c) Dérivées partielles de fonctions composées

Proposition 8 (dérivée partielles de fonctions composées).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g = f \circ \varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Proposition 9 (utilisation des coordonnées polaires).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0, 0)$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\rho, \theta) \mapsto f((\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \sin \theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times (-\rho \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \rho \cos \theta$$

démonstration : on compose les D.L. d'ordre 1.

Remarque 7. En physique, pour une fonction $(x, y) \mapsto V(x, y)$, on écrit parfois « $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho}$ » pour désigner : $\frac{\partial V \circ \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta)$

Proposition 10 (changement de variables affine).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$, et

$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(u, v) \mapsto (au + bv, cu + dv)$ et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et

$g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times a + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times c$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times b + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times d$$

II. Recherche d'extremums

Cadre : $p \in \llbracket 2, 3 \rrbracket$

II.1 Extremums locaux ou globaux

Définition 8.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum**, resp. **maximum**) **local** en a , s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$\forall x \in \mathcal{U}, \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum local en a , on dit que f admet un **extremum local**.

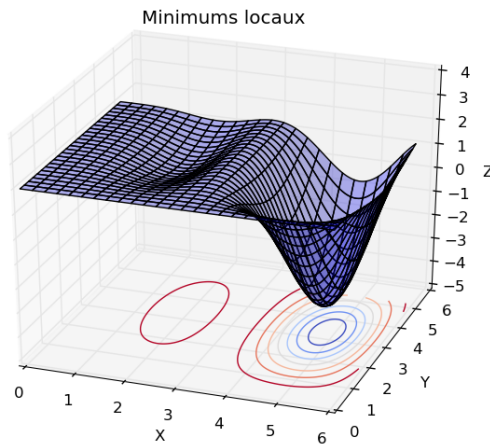
Définition 9.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum global** (resp. **maximum global**) en a , si :

$\forall x \in \mathcal{U}, f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum global en a , on dit que f admet un **extremum global**.



$f : (x, y) \mapsto 2 - 1/4 \sin(y/2)^2 (x \sin(x))^2$ n'a pas de minimum global (elle tend vers $-\infty$ le long de la suite de points $M_n = (n\pi/2, \pi)$), mais a pour maximum global la valeur 2 atteinte en les $(k\pi, 2\ell\pi)$ pour k, ℓ entiers.

Proposition 11.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum en a , alors a est un point critique (i.e. $\nabla f(a) = \vec{0}$)

démonstration : Dans le cas d'un maximum : nécessairement, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(a + t\vec{e}_i) \leq f(a)$.

Mais alors, la fonction $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + t\vec{e}_i)$ est une fonction dérivable, qui admet un maximum en 0, donc $\varphi'(0) = 0$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(f(a + a + t\vec{e}_i))|_{t=0} = 0$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

II.2 Parties fermées

Définition 10.

Une partie F de E est dite **fermée** (on dit encore que F est un fermé de E) si son complémentaire dans E est ouvert.

i.e. : F fermé ssi ${}^c F = E \setminus F = \{x \in E; x \notin F\}$ est ouvert.

i.e. : autour de chaque point a de ${}^c F$ on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans ${}^c F$ et contenant a

exemple 3. E et $\emptyset$ sont des fermés

$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$

Toute boule fermée est un fermé.

II.3 Théorème des bornes atteintes

Théorème 12 ((non exigible)).

Soient E e.v.n. de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si K est un **fermé borné** de E , alors f est bornée sur K et y atteint ses bornes : Il existe $x_0, x'_0 \in K$ tels que

$$\text{i) } f(x_0) = \inf\{f(x); x \in K\} = \min\{f(x); x \in K\}$$

$$\text{ii) } f(x'_0) = \sup\{f(x); x \in K\} = \max\{f(x); x \in K\}$$

i.e. : **Toute fonction à valeurs réelles continue sur un fermé borné** de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$

y est bornée et y atteint ses bornes

idée démonstration : Via le théorème de Bolzano-Weierstrass : On extrait d'une suite (x_n) telle que $f(x_n) \rightarrow M$ une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, et on conclut par continuité. $\square$

III. Dérivées partielles d'ordre 2

III.1 Définition

Définition 11.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Notation 4. Dans le cas d'une application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h \vec{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$$

On rencontre aussi la notation $\partial_{ij}^2 f$ pour désigner $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, et les notations :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a)$$

etc...

III.2 Propriétés

Théorème 13 (De Schwarz).

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, et tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

IV. ^[ADMIS]EDP

IV.1 E.D.P. d'ordre 1

Définition 12.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **équation aux dérivées partielles** d'ordre 1 toute équation, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ faisant intervenir les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

exemple 4. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{0}} \text{ a pour ensemble de solutions } \{f : (x, y) \mapsto g(y); g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

exemple 5. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{0}} \text{ a pour ensemble de solutions } \{f : (x, y) \mapsto h(x); h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

lemme 14. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto h(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tous $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$h(x, y) = h(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial x}(u, y) du = h(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial x}(u, y) du$$

Proposition 15.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) \quad (1)$$

sont de la forme $f : (x, y) \mapsto K(y) + \int_{x_0}^x g(s, y) \, ds$, avec K de classe $\mathcal{C}^1$.

démonstration :

Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ fixé. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, en appliquant le lemme à f , on obtient :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) \, dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(u, y_0) \, du \stackrel{\text{EDP}}{=} f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) \, dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(u, y) \, du = K(y) + \int_{x_0}^x g(u, y) \, du$$

en posant $K : y \mapsto f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) \, dv$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$

(car $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v)$ est continue donc $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ aussi) $\square$

exemple 6. l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions :

$$\left\{ (x, y) \mapsto K(y) + \int_{x_0}^x (u + y) \, du; K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\} = \left\{ (x, y) \mapsto K(y) + \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + y(x - x_0); K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\} \\ = \left\{ f : (x, y) \mapsto G(y) + \frac{x^2}{2} + yx; G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

IV.2 E.D.P. d'ordre 2

Définition 13.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **équation aux dérivées partielles** d'ordre 2 toute équation, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ faisant intervenir les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

exemple 7. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions $\{(x, y) \mapsto x G(y) + K(y); G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$

dém : il suffit de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est solution de l'EDP $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, donc de la forme $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto G(y)$, avec G de classe $\mathcal{C}^1$. Puis on remarque que f est solution de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = G(y)$, donc de la forme $(x, y) \mapsto K(y) + \int G(y) \, dx$, avec K de classe $\mathcal{C}^1$.

Le fait que F soit de classe $\mathcal{C}^2$ implique que $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x G'(y) + K'(y)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc K' (prendre $x = 0$) puis G' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

exemple 8. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \tilde{0}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions $\{f : (x, y) \mapsto G(x) + K(y); G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$

IV.3 E.D.P. issues de la physique

exemple 9. Equation de la chaleur

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles (C) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

d'inconnue $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & f(0, t) = f(1, t) = 0 & (\text{bord}) \\ \forall x \in [0, 1] & f(x, 0) = \theta(x) & (\text{température initiale}) \end{cases}$$

exemple 10. Equation des cordes vibrantes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ (E)

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto u(x, t)$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec les conditions initiales $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

1. En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = y + s \\ t = \frac{-y}{c} + \frac{s}{c} \end{cases}$ on montre que

$$v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \frac{-y}{c} + \frac{s}{c}\right) \text{ vérifie l'EDP } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$$

2. On en déduit qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que v soit de la forme $v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$
3. En déduire que u est de la forme $u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$

IV.4 résolution d'E.D.P. via changement de variables

4.a) Utilisation de changement de variables affines

Pour résoudre : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (E)

on pose : $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, de sorte que $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, et $g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$

Comme $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$, on vérifie que (E) $\iff$ (E') $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, donc que g est de la forme $(u, v) \mapsto H(u)$

puis on trouve $f(x, y) = H(x + y)$, pour H de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour résoudre : $a \frac{\partial f}{\partial x} = b \frac{\partial f}{\partial y}$ (E)

on pose : $\begin{cases} u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \\ v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \end{cases}$ on vérifie que (E) $\iff$ (E') $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, donc que g est de la forme $(u, v) \mapsto H(u)$

puis on trouve $f(x, y) = H\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$, pour H de classe $\mathcal{C}^1$.

4.b) Utilisation des coordonnées polaires

Pour résoudre : $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$ (E), sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $\mathbb{R}^- \times \{0\}$:

on pose : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, de sorte que $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta = \text{Arg}(x + iy) \end{cases}$, et $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Comme $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$, avec L_2 , on vérifie que :

$$(E) \iff (E') \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -g,$$

donc que g est de la forme $(r, \theta) \mapsto K(r)e^{-\theta}$

puis on trouve $f(x, y) = K(\sqrt{x^2 + y^2})e^{-\text{Arg}(x+iy)}$, pour K de classe $\mathcal{C}^1$.

exemple 11. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

2. Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$$

en polaires, pour $\theta = \arctan(y/x)$, on trouve $f(x, y) = C(x/y) \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha$.

Pour la seconde $f(x, y) = C(x/y) + \frac{2}{3} \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}^\alpha$.

V. Compléments

V.1 Rappels Normes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Cadre : E espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

La plupart du temps on prendra $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \in \{2, 3\}$. Sinon n sera un entier naturel quelconque, et $E = \mathbb{C}^n$ pour les normes.

V.2 Normes sur un $\mathbb{R}$ -e.v.

Définition 14.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **norme** si :

- i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité);
- ii) $\forall x \in E, [\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E]$ (séparation);
- iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité);
- iv) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);

Proposition 16 (rappel de PCSI).

Si $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .

démonstration : la positivité et le caractère définie de la norme découlent directement de ceux du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité. Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. $\square$

V.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur x admet une unique décomposition dans cette base sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ pour un unique } n\text{-uplet } (x_1, \dots, x_n) \text{ de coordonnées.}$$

Proposition 17.

L'application $\| \cdot \|_\infty : x \mapsto \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéité est directe.

$$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 18.

L'application $\| \cdot \|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme 1**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.

$$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

Pour $x, y \in E$, on a : $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$, donc $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 19.

L'application $\| \cdot \|_2 : x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable car $\| \cdot \|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel

$$(\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i) \quad \square$$

V.4 Distance

Définition 15.

L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une **distance** si :

- i) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
- ii) $\forall (x, y) \in E^2, [d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y]$ (séparation);
- iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire);

Proposition 20.

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur E , alors $x \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E .

Définition 16.

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur E on dit que l'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est la **distance associée**.

exemple 12. $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$, distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$.

V.5 Boules

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

5.a) Boules ouvertes

Définition 17.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par :

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\} = \{x \in E, d(x, a) < r\}$$

exemple 13. tracés de boules unités pour $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$

5.b) Boules fermées

Définition 18.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a, r)$ défini par :

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\} = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}$$

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 8. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 9. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

Remarque 10. Dans le cas $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$, on parle aussi de sphère en lieu et place de boule.

V.6 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition 19.

Une partie U de E est dite **ouverte** (on dit encore que U est un ouvert de E) si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U$$

i.e. : autour de chaque point a de A on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans A et contenant a

V.7 Limite d'une fonction

Définition 20.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Y \in \Delta; \|Y - A\| \leq \varepsilon$$

Définition 21 (Limite).

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, D une partie de E , et $A \in E$ un point adhérent à D . Une application $f : E \rightarrow F$ **admet une limite** ℓ en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in D, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas on note cela $\lim_{X \rightarrow A, X \in D} f(X) = \ell$ ou $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow A} \ell$

Proposition 21.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : ADMIS. On montrerait, en dimension finie qu'il existe $K > 1$ tel que :

$$\forall Y, \frac{1}{K} \|Y - L\|_a \|Y - L\|_b \leq K \|Y - L\|_a$$

Remarque 11. En pratique : on peut travailler avec les composantes de x dans une base à l'aide de la norme infinie de E , et avec les composantes des vecteurs $y = f(x)$ dans une base à l'aide de la norme infinie de F .

Définition 22 (Cas particulier).

Soit I un intervalle réel non vide. On note $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ **admet une limite** vectorielle ℓ en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Remarque 12. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\| \cdot \|$ sur E : elles sont toutes "comparables" !

On note cela également $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in I} \ell$

V.8 Continuité

Définition 23 (Continuité).

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** en $A \in E$ si : $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$

Remarque 13. Ainsi Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in D, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$$

Définition 24.

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$

exemple 14. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 14. A l'aide de la notion de limites de suites, on en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 22.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p); \dots; f_n(x_1, \dots, x_p))$, et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses composantes.
Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

démonstration : le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$

exemple 15. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte,
 $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 15. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

V.9 Cas particulier : fonction de la variable réelle

Cas particulier : Soit I un intervalle réel non vide. On note $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 25.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **continue** en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Remarque 16. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !

f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in I]{} f(a)$

Définition 26.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **continue** sur I si elle est continue en tout point de I

Proposition 23 (continuité et composantes).

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ le sont.

V.10 Fonctions usuelles

Proposition 24.

Toute somme, produit ou composée d'applications continues est continue.

V.11 Intérieur, Adhérence, Frontière

Définition 27.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point intérieur** de Δ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$.

Définition 28.

Soit Δ une partie de E .

On appelle **intérieur** de Δ l'ensemble Δ° constitué des points intérieurs à Δ .

Définition 29.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Remarque 17. Une partie est fermée si elle n'est constituée que de points adhérents.

Définition 30.

Soit Δ une partie de E .

On appelle **adhérence** de Δ l'ensemble $\overline{\Delta}$ constitué des points adhérents à Δ .

On appelle **frontière** de Δ l'ensemble $\partial\Delta$ constitué des points adhérents non intérieurs à Δ .

Remarque 18. $\Delta^\circ \subset \Delta \subset \overline{\Delta}$

Proposition 25.

Si (X_n) est une suite de Δ qui converge vers X , alors $X \in \overline{\Delta}$.

En particulier toute limite de suite de points d'un fermé appartient à ce fermé.

Remarque 19. En pratique, lorsque l'on cherche à déterminer le maximum d'une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie fermée bornée D du plan :

- On cherche le maximum m_b sur son bord ∂D (il est atteint, car f est continue sur le fermé borné ∂D).
- On recherche d'éventuels points critiques sur l'intérieur $\text{int}(D)$.
- S'il n'y en a pas, la borne supérieure est réalisée au bord, et elle est atteinte, c'est un maximum.
- S'il y en a, on compare le maximum au bord, avec les valeurs en les points critiques.

V.12 Boules ouvertes

Proposition 26.

Une boule ouverte est un ouvert.

démonstration : Le cas d'une boule ouverte de rayon 0 est trivial.

Soit $(x, R) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B(x, R)$ est un ouvert de E .

Soit $a \in B(x, R)$, et soit $\rho = d(a, x) = \|x - a\|$. On a $\rho < R$, donc pour tout y appartenant à $B\left(a, \frac{R - \rho}{2}\right)$, on a :

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| = \rho + d(a, y) \leq \rho + \frac{R - \rho}{2} = \frac{R + \rho}{2} < R, \text{ donc } y \in B(x, R).$$

Ainsi, $a \in B\left(a, \frac{R - \rho}{2}\right) \subset B(x, R)$. $\square$

application : dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, tout demi-plan ouvert est un ouvert.

(ce serait vrai pour toute autre norme, elles sont toutes équivalentes car on est en dimension finie)

exemple 16. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, les intervalles ouverts sont des ouverts.

exemple 17. tout demi-plan (dit ouvert, car défini par une inégalité stricte) $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

Soit $a = (x, y) \in \mathcal{P}$. Notons $r = |y|/2 > 0$. Pour tout $p = (u, v) \in B(a, r)$, on a $|y - v| \leq \sqrt{(a - u)^2 + (y - v)^2} < r$, donc : $y - v \leq |y - v| \leq |y|/2$, donc $v > |y|/2$, donc $p \in \mathcal{P}$. Ainsi, $a \in B(a, r) \subset \mathcal{P}$.

V.13 L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert

Cadre : E (resp. F) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\| \cdot \|_E$ (resp. $\| \cdot \|_F$).

Proposition 27.

Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors les ensembles $\{X \in E; f(X) > 0\}$ et $\{X \in E; f(X) < 0\}$ sont des ouverts.

démonstration : Soit $A \in U = \{X \in E; f(X) > 0\}$. Par continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall X, \|X - A\| \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{|f(A)|}{2}$, et η associé, on a pour tout X tel que $\|X - A\| < \eta$:

$$|f(X) - f(A)| \leq \frac{|f(A)|}{2}, \text{ donc } f(X) - f(A) \geq -\frac{|f(A)|}{2}, \text{ d'où } f(X) \geq \frac{|f(A)|}{2} > 0, \text{ donc } X \in A.$$

Ainsi $B(A, \eta) \subset A$. $\square$

exemple 18. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + ye^x > 3\}$ est un ouvert.

Remarque 20. ce serait faux pour les images directes. $f : x \mapsto 1, f(\mathbb{R}) = \{1\}$ n'est pas un ouvert.

Remarque 21. Ce résultat est très pratique pour justifier qu'un ensemble (défini par une « formule » continue) est un ouvert.

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, ce chapitre privilégie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leq 3$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U .

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1.

Différentielle de f en a .

Notations $\partial_i f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Démonstration non exigible.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U .

Elle est définie comme l'application linéaire $df(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans

$$\mathbb{R} : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a).$$

Notation $df(a) \cdot h$.

b) Règle de la chaîne

Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Application au calcul des dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

c) Gradient

Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$.

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation $\nabla f(a)$.

$\Leftrightarrow$ PC : champ électrostatique, loi de Fick, loi de Fourier.

d) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Équation de la tangente en un point régulier.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Courbes tracées sur une surface.

On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$.

$\Leftrightarrow$ PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

$\Leftrightarrow$ I : tracé de lignes de niveau.

Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z = g(x, y)$.

CONTENUS

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur la surface.

e) Dérivées partielles d'ordre deux

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème de Schwarz.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Notations $\partial_{i,j}^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Démonstration hors programme.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.

$\Leftrightarrow$ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ atteint un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.

$\Leftrightarrow$ PC : mécanique et électricité.

a) Normes : rappels et compléments

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé.

Norme associée à un produit scalaire.

Distance associée à une norme.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

Parties bornées, suites bornées

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.