

Table des matières

I. Continuité	4
I.1 Boule ouverte	4
I.2 Limite d'une fonction en un point adhérent	4
I.3 Continuité d'une fonction	4
II. Continuité, dérivées partielles d'ordre 1	5
II.1 Dérivées partielles, la classe $\mathcal{C}^1$	5
II.2 Propriétés	6
II.3 Réécritures différentielles	8
II.4 Composition	9
4.a) Règle de la chaîne	9
4.b) Lignes de niveau planes	9
4.c) Tangente à une courbe plane donnée par son équation cartésienne	11
4.d) Dérivées partielles de fonctions composées	11
III. Recherche d'extremums	12
III.1 Extremums locaux ou globaux	12
III.2 Parties fermées	13
III.3 Théorème des bornes atteintes	14
IV. Dérivées partielles d'ordre 2	14
IV.1 Définition	14
IV.2 Propriétés	15
V. EDP	15
V.1 E.D.P. d'ordre 1	15
V.2 E.D.P. d'ordre 2	16
V.3 E.D.P. issues de la physique	16
V.4 résolution d'E.D.P. via changement de variables	17
4.a) Utilisation de changement de variables affines	17
4.b) Utilisation des coordonnées polaires	17
VI. Compléments	19
VI.1 Rappels Normes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	19
VI.2 Normes sur un $\mathbb{R}$ -e.v.	19
VI.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$	19
VI.4 Distance	20
VI.5 Boules	21
5.a) Boules ouvertes	21
5.b) Boules fermées	21
VI.6 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	21
VI.7 Limite d'une fonction	21
VI.8 Continuité	22
VI.9 Cas particulier : fonction de la variable réelle	23
VI.10 Fonctions usuelles	23
VI.11 Intérieur, Adhérence, Frontière	24

VI.12 Boules ouvertes	24
VI.13 L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert	25
13.a) Continuité en dimension finie	25
13.b) Fonctions usuelles	26
VII Pré-requis	30
VII.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$	30
1.a) Comparaison de normes en dimension finie	30
VII.2 Boules	31
2.a) Boule fermée	31
2.b) Parties bornées	31
2.c) Boule ouverte	31
VII.3 Limites, continuité	32
3.a) Limite d'une suite	32
VII.4 Propriétés	32
4.a) Limites	32
4.b) Propriétés	32
4.c) Limite d'une fonction	33
VII.5 Continuité	35
5.a) Continuité d'une fonction de la variable réelle	35

Pré-requis

Objectifs

Introduction

Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}$ est une surface de $\mathbb{R}^3$.
De nombreux problèmes à plusieurs variables peuvent ainsi être représentés.

I. Continuité

Cadre soient p un entier appartenant à $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^p$.

On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

I.1 Boule ouverte

Définition 1.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 1. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

I.2 Limite d'une fonction en un point adhérent

Définition 2.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Définition 3 (Limite).

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E , et $A \in E$ un point adhérent à Δ . Une application $f : E \rightarrow F$ **admet une limite** L en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Delta, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - L\|_F \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas on note cela $\lim_{X \rightarrow A, X \in \Delta} f(X) = L$ ou $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow A} L$

I.3 Continuité d'une fonction

Définition 4 (Continuité).

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E , et $A \in E$ un point adhérent à Δ .

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in \Delta, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$$

Définition 5.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite continue sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$.

exemple 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

II. Continuité, dérivées partielles d'ordre 1

II.1 Dérivées partielles, la classe $\mathcal{C}^1$

Définition 6.

Soit a un point de E , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa j^{me} coordonnée x_j si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h \vec{e}_j) - f(a))$$

Si tel est le cas on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ la valeur de cette limite.

Notation 1. Dans le cas d'une application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1, a_2 + h, a_3) - f(a_1, a_2, a_3))$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1, a_2, a_3 + h) - f(a_1, a_2, a_3))$$

Définition 7.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E . Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si ses applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 8.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Remarque 2. On adapte pour $E = \mathbb{R}^2$

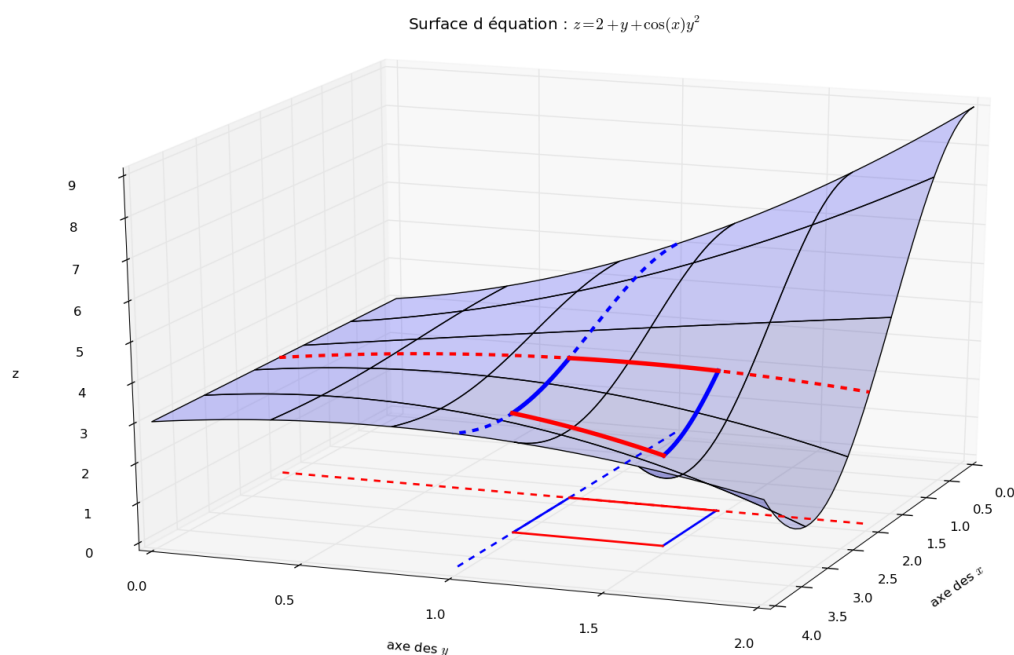
Notation 2. On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3. On pourrait généraliser la notation à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ pour des fonctions à valeurs vectorielles dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

II.2 Propriétés

exemple 2. Soit $f : (x, y) \mapsto 3 + y + y^2 \cos(x)$
 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y^2 \sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + 2y \cos(x)$$



Proposition 1 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|\vec{h}\|_2)$$

démonstration (non exigible) : dans le cas $p = 2$ et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.

On pose $f_{\cdot, a_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f_{\cdot, a_2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$f_{\cdot, a_2}(a_1 + h_1) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f_{\cdot, a_2}(a_1) + h_1 \frac{df_{\cdot, a_2}}{dx_1}(a_1) + o(h_1)$$

ou encore

$$f(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (1)$$

De même on pose $f_{a_1+h_1, \cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_2 \mapsto f(a_1 + h_1, x_2)$ et on obtient :

$$f_{a_1+h_1, \cdot}(a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f_{a_1+h_1, \cdot}(a_2) + h_2 \frac{df_{a_1+h_1, \cdot}}{dx_2}(a_2) + o(h_2)$$

ou encore

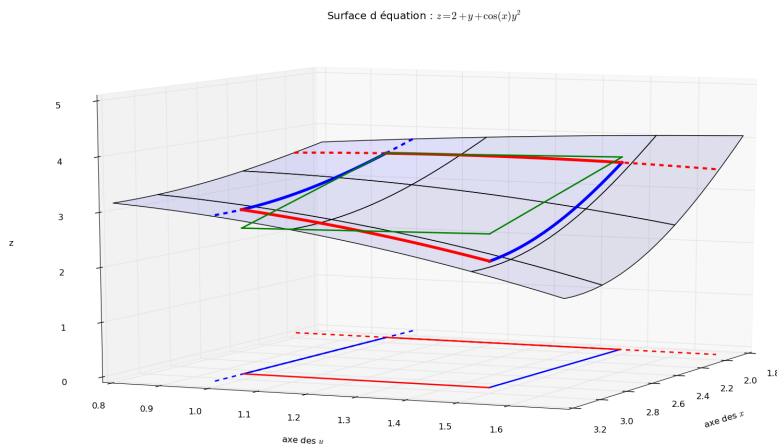
$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1 + h_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) + o(h_2) \quad (2)$$

Or par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (3)$$

Mais alors, d'après (1), (2), (3), on a

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}) \quad (4)$$



Corollaire 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

II.3 Réécritures différentielles**Définition 9.**

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle
(vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix}$ dans
la base canonique.

Proposition 4 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$,
on a avec la notation $(|)$ pour le produit scalaire usuel :
$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{\sim} f(a) + (\nabla f(a) | \vec{h}) + o\left(\|\vec{h}\|_2\right)$$

Définition 10.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle
différentielle de f en a l'application linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, noté $df(a)$, définie par :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Notation 3. Le terme $\sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est parfois noté $df(a) \bullet \vec{h}$ et est égal à $(\nabla f(a) | \vec{h})$.

Remarque 4. En physique, pour une fonction $(p, T) \mapsto S(p, T)$, on écrit parfois « $dS = \frac{\partial S}{\partial p} dp + \frac{\partial S}{\partial T} dT$ » pour désigner l'approximation à l'ordre 1 :

$$S(p_0 + \delta p, T_0 + \delta T) - S(p_0, T_0) \underset{\delta \rightarrow 0, \delta p \rightarrow 0}{=} \frac{\partial S}{\partial p}(p_0, T_0) \delta p + \frac{\partial S}{\partial T}(p_0, T_0) \delta T + o(\sqrt{\delta p^2 + \delta T^2})$$

Proposition 5 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \bullet \vec{h} + o(\|\vec{h}\|_2)$$

II.4 Composition

4.a) Règle de la chaîne

Proposition 6 (règle de la chaîne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle ouvert, $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\{x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)); t \in I\} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt}(f(x_1(t), \dots, x_p(t))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t)) \frac{dx_p}{dt}(t)$$

démonstration : On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0 \quad (5)$$

et pour $a = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h))_{1 \leq i \leq p}$:

$$f(a + \delta) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \delta_i \quad (6)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{h}(f(x(t+h)) - f(x(t))) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t). \quad \square$$

Remarque 5. En physique, on note $V = f \circ x$ et la dérivée par rapport à t est $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_p}x'_p(t)$.

4.b) Lignes de niveau planes

Définition 11.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane, paramétrée par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ alors la tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Proposition 7 (le gradient est orthogonal aux lignes de niveau).

Si $\mathcal{L}_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = K\}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = K$, pour $K \in \mathbb{R}$ constante fixée, alors pour tout point M de $\mathcal{C}$, et pour tout vecteur $\vec{T}_M$ tangent à la courbe en M , on a $\nabla f(M) \perp \vec{T}_M$.

démonstration : On peut paramétrer la ligne de niveau K par : $\mathcal{L}_K = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$, pour un intervalle réel I , et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

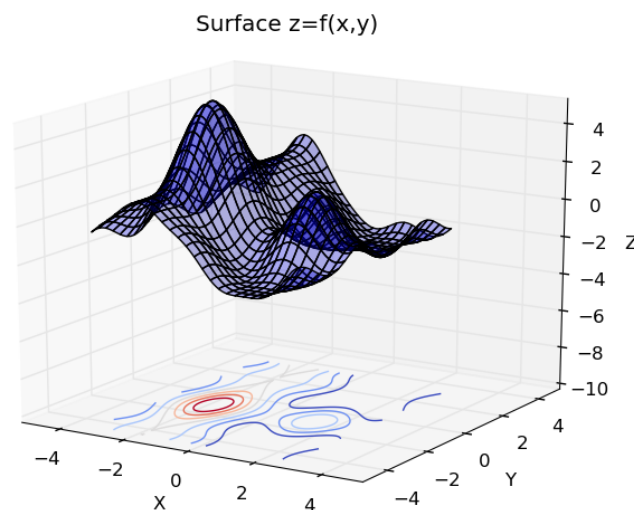
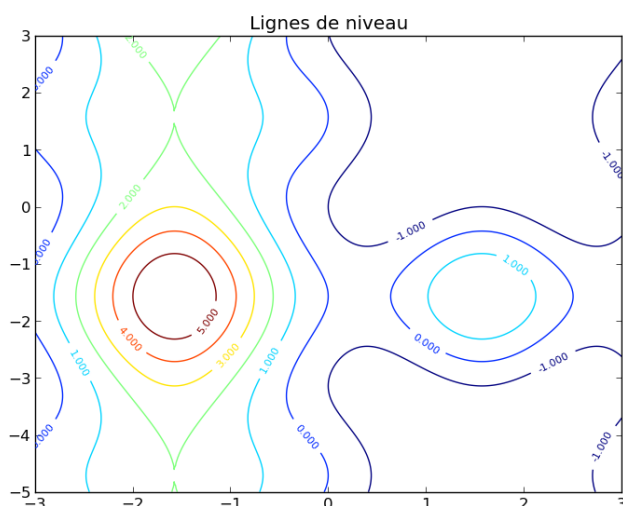
Comme pour tout $t \in I$, $K = f(x(t), y(t))$, en dérivant on obtient :

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t),$$

d'où $\left\langle \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(M) \right\rangle = 0$, le vecteur vitesse $\vec{T}_M$ étant le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ $\square$

Remarque 6. En physique, on dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau (équipotentiellles), et orienté selon les valeurs croissantes de f , en tout point où il est non nul.

exemple 3. $z = f(x, y) = -2 + (1 - \sin(x))^2 + (\sin(y) - \sin(x)^2)^2$



Remarque 7. Pour un relief paramétré par $z = f(x, y)$, le vecteur $\nabla f((x, y))$ dirige la plus grande pente au point $M(x, y, f(x, y))$ de la surface : en effet, la variation de $f(x(t), y(t)) - f(x_M, y_M)$ est maximale lorsque le terme d'ordre 1 $\left\langle \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(x_M, y_M) \right\rangle$ est maximal, ce qui correspond au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

4.c) Tangente à une courbe plane donnée par son équation cartésienne

Définition 12.

Etant donnée $\mathcal{C}$ une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M) \right) \neq (0, 0).$$

On appelle **point singulier** tout point $M = (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M) \right) = (0, 0).$$

Proposition 8.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane d'équation cartésienne $g(x, y) = 0$, pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et M un point de $\mathcal{C}$, alors la tangente $\mathcal{T}_M$ à la courbe $\mathcal{C}$ en M est la droite passant par M et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\text{Grad } g_M}$.

démonstration :

on paramètre $\mathcal{C}$ par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Pour tout $t \in I$, on a $g(\gamma(t)) = 0$, donc d'après la règle de la chaîne,

$$0 = \frac{d}{dt}(g(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$$

ou encore :

$$\overrightarrow{\text{Grad } g_{\gamma(t)}} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$. $\square$

Remarque 8. Une équation cartésienne de la tangente en M est donc $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad } g_{\gamma(t)}} = 0$, soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

4.d) Dérivées partielles de fonctions composées

Proposition 9 (dérivée partielles de fonctions composées).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g = f \circ \varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Proposition 10 (utilisation des coordonnées polaires).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0, 0)$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, (\rho, \theta) \mapsto f((\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \sin \theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times (-\rho \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \rho \cos \theta$$

démonstration : on compose les D.L. d'ordre 1.

Remarque 9. En physique, pour une fonction $(x, y) \mapsto V(x, y)$, on écrit parfois « $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho}$ »

pour désigner : $\frac{\partial V \circ \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta)$

Proposition 11 (changement de variables affine).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$, et

$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, (u, v) \mapsto (au + bv, cu + dv)$ et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, et

$g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times a + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times c$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times b + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times d$$

III. Recherche d'extremums

Cadre : $p \in \llbracket 2, 3 \rrbracket$

III.1 Extremums locaux ou globaux

Définition 13.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum**, resp. **maximum** **local** en a , s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$\forall x \in \mathcal{U}, \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum local en a , on dit que f admet un **extremum local**.

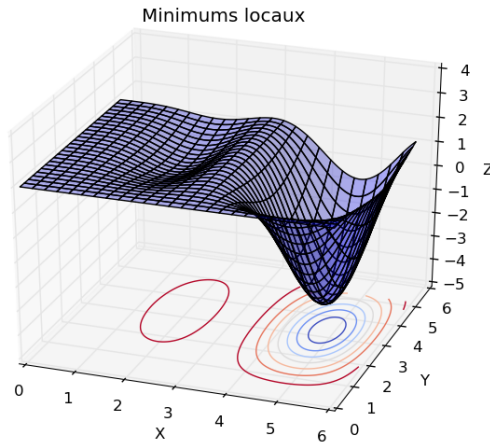
Définition 14.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum global** (resp. **maximum global**) en a , si :

$\forall x \in \mathcal{U}, f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum global en a , on dit que f admet un **extremum global**.



$f : (x, y) \mapsto 2 - 1/4 \sin(y/2)^2 (x \sin(x))^2$ n'a pas de minimum global (elle tend vers $-\infty$ le long de la suite de points $M_n = (n\pi/2, \pi)$), mais a pour maximum global la valeur 2 atteinte en les $(k\pi, 2\ell\pi)$ pour k, ℓ entiers.

Proposition 12.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum en a , alors a est un point critique (i.e. $\nabla f(a) = \vec{0}$)

démonstration : Dans le cas d'un maximum : nécessairement, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(a + t\vec{e}_i) \leq f(a)$.

Mais alors, la fonction $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + t\vec{e}_i)$ est une fonction dérivable, qui admet un maximum en 0, donc $\varphi'(0) = 0$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(f(a + a + t\vec{e}_i))|_{t=0} = 0$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

III.2 Parties fermées

Définition 15.

Une partie F de E est dite **fermée** (on dit encore que F est un fermé de E) si son complémentaire dans E est ouvert.

i.e. : F fermé ssi ${}^c F = E \setminus F = \{x \in E; x \notin F\}$ est ouvert.

i.e. : autour de chaque point a de ${}^c F$ on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans ${}^c F$ et contenant a

exemple 4. E et $\emptyset$ sont des fermés

$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$

Toute boule fermée est un fermé.

III.3 Théorème des bornes atteintes

Théorème 13 ((non exigible)).

Soient E e.v.n. de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si K est un **fermé borné** de E , alors f est bornée sur K et y atteint ses bornes : Il existe $x_0, x'_0 \in K$ tels que

- i) $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in K\} = \min\{f(x); x \in K\}$
- ii) $f(x'_0) = \sup\{f(x); x \in K\} = \max\{f(x); x \in K\}$

i.e. : **Toute fonction à valeurs réelles continue sur un fermé borné** de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$

y est bornée et y atteint ses bornes

idée démonstration : Via le théorème de Bolzano-Weierstrass : On extrait d'une suite (x_n) telle que $f(x_n) \rightarrow M$ une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, et on conclut par continuité. $\square$

IV. Dérivées partielles d'ordre 2

IV.1 Définition

Définition 16.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Notation 4. Dans le cas d'une application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h \vec{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$$

On rencontre aussi la notation $\partial_{ij}^2 f$ pour désigner $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, et les notations :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a)$$

etc...

IV.2 Propriétés

Théorème 14 (De Schwarz).

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, et tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

[ADMIS]

V. EDP

V.1 E.D.P. d'ordre 1

Définition 17.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **équation aux dérivées partielles** d'ordre 1 toute équation, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ faisant intervenir les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

exemple 5. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{0} \right\} \text{ a pour ensemble de solutions } \{f : (x, y) \mapsto g(y); g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

exemple 6. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{0} \right\} \text{ a pour ensemble de solutions } \{f : (x, y) \mapsto h(x); h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

lemme 15. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto h(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tous $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$h(x, y) = h(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial x}(u, y) du = h(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial x}(u, y) du$$

Proposition 16.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) \quad (1)$$

sont de la forme $f : (x, y) \mapsto K(y) + \int_{x_0}^x g(s, y) ds$, avec K de classe $\mathcal{C}^1$.

démonstration :

Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ fixé. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, en appliquant le lemme à f , on obtient :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(u, y_0) du \stackrel{EDP}{=} f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(u, y) du = K(y) + \int_{x_0}^x g(u, y) du$$

en posant $K : y \mapsto f(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v) dv$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$

(car $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, v)$ est continue donc $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ aussi) $\square$

exemple 7. l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions :

$$\left\{ (x, y) \mapsto K(y) + \int_{x_0}^x (u + y) du; K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\} = \left\{ (x, y) \mapsto K(y) + \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + y(x - x_0); K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

$$= \left\{ f : (x, y) \mapsto G(y) + \frac{x^2}{2} + yx; G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

V.2 E.D.P. d'ordre 2

Définition 18.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **équation aux dérivées partielles** d'ordre 2 toute équation, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ faisant intervenir les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

exemple 8. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions $\{(x, y) \mapsto x G(y) + K(y); G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$

dém : il suffit de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est solution de l'EDP $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, donc de la forme $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto G(y)$, avec G de classe $\mathcal{C}^1$. Puis on remarque que f est solution de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = G(y)$, donc de la forme $(x, y) \mapsto K(y) + \int G(y) dx$, avec K de classe $\mathcal{C}^1$.

Le fait que F soit de classe $\mathcal{C}^2$ implique que $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x G'(y) + K'(y)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc K' (prendre $x = 0$) puis G' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

exemple 9. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \tilde{0}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions $\{f : (x, y) \mapsto G(x) + K(y); G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$

V.3 E.D.P. issues de la physique

exemple 10. Equation de la chaleur

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles (C) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

d'inconnue $f : \begin{matrix} [0, 1] \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto f(x, t) \end{matrix}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & f(0, t) = f(1, t) = 0 & (\text{bord}) \\ \forall x \in [0, 1] & f(x, 0) = \theta(x) & (\text{température initiale}) \end{cases}$$

exemple 11. Equation des cordes vibrantes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ (E)

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec les conditions initiales $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

1. En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = y + s \\ t = \frac{-y}{c} + \frac{s}{c} \end{cases}$ on montre que

$$v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \frac{-y}{c} + \frac{s}{c}\right) \text{ vérifie l'EDP } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$$

2. On en déduit qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que v soit de la forme $v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$
3. En déduire que u est de la forme $u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$

V.4 résolution d'E.D.P. via changement de variables

4.a) Utilisation de changement de variables affines

Pour résoudre : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (E)$

on pose : $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, de sorte que $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, et $g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$

Comme $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$, on vérifie que $(E) \iff (E') \quad \frac{\partial g}{\partial v} = 0$, donc que g est de la forme $(u, v) \mapsto H(u)$

puis on trouve $f(x, y) = H(x + y)$, pour H de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour résoudre : $a \frac{\partial f}{\partial x} = b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (E)$

on pose : $\begin{cases} u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \\ v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \end{cases}$ on vérifie que $(E) \iff (E') \quad \frac{\partial g}{\partial v} = 0$, donc que g est de la forme $(u, v) \mapsto H(u)$

puis on trouve $f(x, y) = H\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$, pour H de classe $\mathcal{C}^1$.

4.b) Utilisation des coordonnées polaires

Pour résoudre : $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f \quad (E)$, sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $\mathbb{R}^- \times \{0\}$:

on pose : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, de sorte que $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta = \text{Arg}(x + iy) \end{cases}$, et $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Comme $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$, avec L_2 , on vérifie que :

$(E) \iff (E') \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -g,$

donc que g est de la forme $(r, \theta) \mapsto K(r)e^{-\theta}$

puis on trouve $f(x, y) = K(\sqrt{x^2 + y^2})e^{-\text{Arg}(x+iy)}$, pour K de classe $\mathcal{C}^1$.

exemple 12. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

2. Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$$

en polaires, pour $\theta = \arctan(y/x)$, on trouve $f(x, y) = C(x/y) \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha$.

Pour la seconde $f(x, y) = C(x/y) + \frac{2}{3} \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}^\alpha$.

VI. Compléments

VI.1 Rappels Normes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Cadre : E espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

La plupart du temps on prendra $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \in \{2, 3\}$. Sinon n sera un entier naturel quelconque, et $E = \mathbb{C}^n$ pour les normes.

VI.2 Normes sur un $\mathbb{R}$ -e.v.

Définition 19.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **norme** si :

- i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité);
- ii) $\forall x \in E, [\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E]$ (séparation);
- iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité);
- iv) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);

Proposition 17 (rappel de PCSI).

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .

démonstration : la positivité et le caractère définie de la norme découlent directement de ceux du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité. Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. $\square$

VI.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur x admet une unique décomposition dans cette base sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ pour un unique } n\text{-uplet } (x_1, \dots, x_n) \text{ de coordonnées.}$$

Proposition 18.

L'application $\| \cdot \|_\infty : x \mapsto \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéité est directe.

$$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 19.

L'application $\| \cdot \|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme 1**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.

$$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

Pour $x, y \in E$, on a : $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$, donc $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 20.

L'application $\| \cdot \|_2 : x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable car $\| \cdot \|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel

$$(\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i) \quad \square$$

VI.4 Distance

Définition 20.

L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une **distance** si :

- i) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
- ii) $\forall (x, y) \in E^2, [d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y]$ (séparation);
- iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire);

Proposition 21.

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur E , alors $x \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E .

Définition 21.

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur E on dit que l'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est la **distance associée**.

exemple 13. $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$, distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$.

VI.5 Boules

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

5.a) Boules ouvertes

Définition 22.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par :

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\} = \{x \in E, d(x, a) < r\}$$

exemple 14. tracés de boules unités pour $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$

5.b) Boules fermées

Définition 23.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a, r)$ défini par :

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\} = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}$$

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 10. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 11. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

Remarque 12. Dans le cas $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$, on parle aussi de sphère en lieu et place de boule.

VI.6 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition 24.

Une partie U de E est dite **ouverte** (on dit encore que U est un ouvert de E) si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U$$

i.e. : autour de chaque point a de A on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans A et contenant a

VI.7 Limite d'une fonction

Définition 25.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Y \in \Delta; \|Y - A\| \leq \varepsilon$$

Définition 26 (Limite).

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, D une partie de E , et $A \in E$ un point adhérent à D . Une application $f : E \rightarrow F$ **admet une limite** ℓ en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in D, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas on note cela $\lim_{X \rightarrow A, X \in D} f(X) = \ell$ ou $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow A} \ell$

Proposition 22.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : ADMIS. On montrerait, en dimension finie qu'il existe $K > 1$ tel que :

$$\forall Y, \frac{1}{K} \|Y - L\|_a \|Y - L\|_b \leq K \|Y - L\|_a$$

Remarque 13. En pratique : on peut travailler avec les composantes de x dans une base à l'aide de la norme infinie de E , et avec les composantes des vecteurs $y = f(x)$ dans une base à l'aide de la norme infinie de F .

Définition 27 (Cas particulier).

Soit I un intervalle réel non vide. On note $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ **admet une limite** vectorielle ℓ en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Remarque 14. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\| \cdot \|$ sur E : elles sont toutes "comparables" !

On note cela également $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in I} \ell$

VI.8 Continuité

Définition 28 (Continuité).

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** en $A \in E$ si : $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$

Remarque 15. Ainsi Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** en A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall X \in D, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$$

Définition 29.

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **continue** sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$

exemple 15. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 16. A l'aide de la notion de limites de suites, on en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 23.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p); \dots; f_n(x_1, \dots, x_p))$, et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses composantes. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

démonstration : le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$

exemple 16. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 17. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

VI.9 Cas particulier : fonction de la variable réelle

Cas particulier : Soit I un intervalle réel non vide. On note $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 30.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Remarque 18. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !

f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in I]{} f(a)$

Définition 31.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I

Proposition 24 (continuité et composantes).

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ le sont.

VI.10 Fonctions usuelles

Proposition 25.

Toute somme, produit ou composée d'applications continues est continue.

VI.11 Intérieur, Adhérence, Frontière

Définition 32.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point intérieur** de Δ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$.

Définition 33.

Soit Δ une partie de E .

On appelle **intérieur** de Δ l'ensemble Δ° constitué des points intérieurs à Δ .

Définition 34.

Soit Δ une partie de E . Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0, B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Remarque 19. Une partie est fermée si elle n'est constituée que de points adhérents.

Définition 35.

Soit Δ une partie de E .

On appelle **adhérence** de Δ l'ensemble $\overline{\Delta}$ constitué des points adhérents à Δ .

On appelle **frontière** de Δ l'ensemble $\partial\Delta$ constitué des points adhérents non intérieurs à Δ .

Remarque 20. $\Delta^\circ \subset \Delta \subset \overline{\Delta}$

Proposition 26.

Si (X_n) est une suite de Δ qui converge vers X , alors $X \in \overline{\Delta}$.

En particulier toute limite de suite de points d'un fermé appartient à ce fermé.

Remarque 21. En pratique, lorsque l'on cherche à déterminer le maximum d'une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie fermée bornée D du plan :

- On cherche le maximum m_b sur son bord ∂D (il est atteint, car f est continue sur le fermé borné ∂D).
- On recherche d'éventuels points critiques sur l'intérieur $\text{int}(D)$.
- S'il n'y en a pas, la borne supérieure est réalisée au bord, et elle est atteinte, c'est un maximum.
- S'il y en a, on compare le maximum au bord, avec les valeurs en les points critiques.

VI.12 Boules ouvertes

Proposition 27.

Une boule ouverte est un ouvert.

démonstration : Le cas d'une boule ouverte de rayon 0 est trivial.

Soit $(x, R) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B(x, R)$ est un ouvert de E .

Soit $a \in B(x, R)$, et soit $\rho = d(a, x) = \|x - a\|$. On a $\rho < R$, donc pour tout y appartenant à $B\left(a, \frac{R - \rho}{2}\right)$, on a :

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| = \rho + d(a, y) \leq \rho + \frac{R - \rho}{2} = \frac{R + \rho}{2} < R, \text{ donc } y \in B(x, R).$$

Ainsi, $a \in B\left(a, \frac{R - \rho}{2}\right) \subset B(x, R)$. $\square$

application : dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, tout demi-plan ouvert est un ouvert.

(ce serait vrai pour toute autre norme, elles sont toutes équivalentes car on est en dimension finie)

exemple 17. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, les intervalles ouverts sont des ouverts.

exemple 18. tout demi-plan (dit ouvert, car défini par une inégalité stricte) $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

Soit $a = (x, y) \in \mathcal{P}$. Notons $r = |y|/2 > 0$. Pour tout $p = (u, v) \in B(a, r)$, on a $|y - v| \leq \sqrt{(a - u)^2 + (y - v)^2} < r$, donc : $y - v \leq |y - v| \leq |y|/2$, donc $v > |y|/2$, donc $p \in \mathcal{P}$. Ainsi, $a \in B(a, r) \subset \mathcal{P}$.

VI.13 L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert

Cadre : E (resp. F) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\| \cdot \|_E$ (resp. $\| \cdot \|_F$).

Proposition 28.

Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors les ensembles $\{X \in E; f(X) > 0\}$ et $\{X \in E; f(X) < 0\}$ sont des ouverts.

démonstration : Soit $A \in U = \{X \in E; f(X) > 0\}$. Par continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall X, \|X - A\| \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{|f(A)|}{2}$, et η associé, on a pour tout X tel que $\|X - A\| < \eta$:

$$|f(X) - f(A)| \leq \frac{|f(X)|}{2}, \text{ donc } f(X) - f(A) \geq -\frac{|f(A)|}{2}, \text{ d'où } f(X) \geq \frac{|f(A)|}{2} > 0, \text{ donc } X \in A.$$

Ainsi $B(A, \eta) \subset A$. $\square$

exemple 19. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + ye^x > 3\}$ est un ouvert.

Remarque 22. ce serait faux pour les images directes. $f : x \mapsto 1, f(\mathbb{R}) = \{1\}$ n'est pas un ouvert.

Remarque 23. Ce résultat est très pratique pour justifier qu'un ensemble (défini par une « formule » continue) est un ouvert.

13.a) Continuité en dimension finie

Remarque 24. Si E et F sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, alors $\| \cdot \|_E$ est équivalente à $\| \cdot \|_{E, \infty}$ et $\| \cdot \|_F$ est équivalente à $\| \cdot \|_{F, \infty}$.

En particulier, il existe deux constantes $K > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \|x\|_{E, \infty} \leq K\|x\|_E \text{ et } \forall y \in F, \|y\|_{F, \infty} \leq C\|y\|_F$$

Donc si f de $(E, \| \cdot \|_E)$ vers $(F, \| \cdot \|_F)$ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant η' associé à $\varepsilon' = \varepsilon/C$, on a :

si $\|X - A\|_{E, \infty} \leq \eta'/K$, alors $\|X - A\|_E \leq \eta$, donc $\|f(X) - f(A)\|_{F, \infty} \leq C\|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$

Ainsi $\|X - A\|_{E, \infty} \leq \eta'/K \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$

On en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 29.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p); \dots; f_n(x_1, \dots, x_p))$, et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses composantes. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

démonstration : le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$

exemple 20. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

13.b) Fonctions usuelles**Proposition 30.**

Toute composée d'applications continues est continue.

Définition 36.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **k -lipschitzienne** si :
 $\forall x, y \in E, \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

i.e. : les images « s'éloignent » au plus d'un facteur k .

Définition 37.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k telle qu'elle soit k -lipschitzienne

exemple 21. l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arctan } x$, est 1-lipschitzienne, car :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\text{Arctan } y - \text{Arctan } x| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{1+t^2} \right\} |y - x|, \text{ d'après l'inégalité des accroissements finis.}$$

exemple 22. l'application $\| \cdot \|_E : E \rightarrow \mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne, car $\forall x, y \in E, \left| \|y\|_E - \|x\|_E \right| \leq \|y - x\|_E$

Théorème 31.

Si $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E .

démonstration :

Soit $a \in E$ fixé, montrons que f est continue en a . Soit $k \geq 0$ tel que f est k -lipschitzienne. Le cas $k = 0$ est trivial. supposons $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$, on a alors :

$$\forall x \in E, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\eta = \varepsilon$$

Ce qui montre la continuité de f en a $\square$.

Définition 38.

On appelle application polynomiale toute application de la forme $P : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=0}^d \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n = j} a_{i_1, \dots, i_n} \right) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.

Théorème 32.

Toute application polynomiale $P : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration :

Toute fonction monôme $M : (x_1, \dots, x_n)$ est un produit de fonctions continues, donc est continue. $\square$

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, ce chapitre privilégie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leq 3$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U .

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1.

Différentielle de f en a .

Notations $\partial_i f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Démonstration non exigible.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U .

Elle est définie comme l'application linéaire $df(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans

$$\mathbb{R} : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a).$$

Notation $df(a) \cdot h$.

b) Règle de la chaîne

Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Application au calcul des dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

c) Gradient

Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$.

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation $\nabla f(a)$.

$\Leftrightarrow$ PC : champ électrostatique, loi de Fick, loi de Fourier.

d) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Équation de la tangente en un point régulier.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Courbes tracées sur une surface.

On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$.

$\Leftrightarrow$ PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

$\Leftrightarrow$ I : tracé de lignes de niveau.

Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z = g(x, y)$.

CONTENUS

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

e) Dérivées partielles d'ordre deux

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème de Schwarz.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur la surface.

Notations $\partial_{i,j}^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Démonstration hors programme.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.

$\Leftrightarrow$ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ atteint un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.

$\Leftrightarrow$ PC : mécanique et électricité.

a) Normes : rappels et compléments

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé.

Norme associée à un produit scalaire.

Distance associée à une norme.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

Parties bornées, suites bornées

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

VII. Pré-requis

VII.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$.

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

exemple 23. L'application $\| \cdot \|_\infty : x \mapsto \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéité est directe.

$$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

D'où le résultat. $\square$

exemple 24. L'application $\| \cdot \|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme 1**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.

$$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

Pour $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

Pour $x, y \in E$, on a : $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$, donc $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où le résultat. $\square$

exemple 25. L'application $\| \cdot \|_2 : x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

1.a) Comparaison de normes en dimension finie

Définition 39.

Deux normes N et $\tilde{N}$ sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists (D, G) \in \mathbb{R}_*^+; \forall x \in E, G \tilde{N}(x) \leq N(x) \leq D \tilde{N}(x)$$

exemple 26. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Théorème 33 (Admis).

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de **dimension finie** n .

Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur E , alors elles sont équivalentes.

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 25. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

VII.2 Boules

2.a) Boule fermée

Définition 40.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$

exemples : $B_f(a, 0) = \{a\}$,
 $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée de centre a .

Remarque 26. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

2.b) Parties bornées

Définition 41.

Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+; \forall x \in \mathcal{A}, \|x\| \leq M$$

exemple 27. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ est borné (par 2 pour la norme euclidienne usuelle)

Définition 42.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+; \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M$$

exemple 28. $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\|x\|_E}$

2.c) Boule ouverte

Définition 43.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$

exemples : $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$, $B(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| < 1\}$ est dite « boule unité » ouverte, $B_f(a, 1) = \{x \in E, \|x - a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité » fermée.

Remarque 27. $\|x - a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.

VII.3 Limites, continuité

3.a) Limite d'une suite

Définition 44.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $L \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|U_n - L\| \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas, on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$

Remarque 28. En dimension finie, en notant $\|\cdot\|_{\infty} : X \mapsto \max_i |x_i|$ la norme infinie, cela revient à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|X_n - L\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Comme toutes les normes équivalentes (dim finie), cette notion de limite quantifiée s'étend pour toute autre norme sur $\mathbb{R}^p$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|X_n - L\|_F \leq \varepsilon$$

VII.4 Propriétés

4.a) Limites

Théorème 34 (limite et coordonnées).

Dans E e.v.n. de dimension finie égale à p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell \iff \left(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n,i} = \ell_i \right),$$

où l'indice i désigne la i ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

démonstration : comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$, on obtient le résultat. $\square$

Définition 45 (limite en dimension finie).

On dit qu'une suite $(X_n(x_{n,1}; \dots; x_{n,p}))_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $F = \mathbb{R}^p$ converge vers $L(\ell_1; \dots; \ell_p)$ si :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_i$$

exemple 29. La suite $(U_n) = ((1 + 1/n)^n, \sin(1/n))$ converge vers $(e, 0)$.

Notation 5. Lorsqu'une suite vectorielle (X_n) converge vers une limite L , on note cela : $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$

4.b) Propriétés

Proposition 35.

Toute suite convergente est bornée.

démonstration : ce résultat a été vu pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : toutes les composantes sont bornées.

Proposition 36.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

démonstration : ce résultat a été vu pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : cela est vraie pour toutes les composantes.

exemple 30. Suite de matrices

Proposition 37 (opérations sur les limites).

Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X$, $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Y$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda X + Y$$

démonstration : on se ramène au cas réel pour les composantes.

Remarque 29. Idem pour les limites infinies et les théorèmes sur les cas d'indétermination de limites restent inchangés sur les composantes.

4.c) Limite d'une fonction

Limite d'une fonction de la variable réelle

Soit I un intervalle réel non vide. On note $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 46.

On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ **admet une limite** vectorielle ℓ en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Remarque 30. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\| \cdot \|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !

On note cela également $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in I]{} \ell$

Limite séquentielle

Proposition 38.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : elles sont toutes équivalentes ! $\square$

Proposition 39 (Caractérisation séquentielle).

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \in E, \ell \in F$ et $f : E \rightarrow F$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \ell$
2. Pour toute suite $(X_n) \in E^n$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = \ell$.

démonstration :

• 1) $\Rightarrow$ 2) :

Supposons 1). Pour (X_n) une suite qui converge vers A .

Soit $\varepsilon > 0$; on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall X \in D, \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$

Mais comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \|X_n - A\|_E \leq \eta$, on obtient :

$\forall n \geq N, \|f(X_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = \ell$

• 1) $\Rightarrow$ 2) : On va démontrer la contraposée :

« NON $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow A} \ell$ » $\Rightarrow$ « il existe une suite (X_n) convergente vers A telle que $(f(X_n))$ ne converge pas vers ℓ »

Supposons que $f(X)$ ne tend pas vers ℓ lorsque $X \rightarrow A$. En niant la définition de limite, on obtient l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in D; [\|X - A\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(X) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

En particulier, on posant $\eta = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists X_n \in E; [\|X_n - A\|_E \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(X_n) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

Mais alors la suite (X_n) converge vers A , alors que la suite $f(X_n)$ ne peut converger vers ℓ . $\square$.

Opérations sur les limites

Proposition 40.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, $a \in E, b, c \in F$.

Si $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow a} b$ et si $g(X) \xrightarrow{X \rightarrow a} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda g(X) + f(X) \xrightarrow{X \rightarrow a} \lambda c + b$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes $\square$

Proposition 41.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, $a \in E, b \in F, c \in G$.

Si $f(X) \xrightarrow{X \rightarrow a} b$ et si $g(Y) \xrightarrow{Y \rightarrow b} c$, alors

$$g(f(X)) \xrightarrow{X \rightarrow a} c$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes $\square$

VII.5 Continuité

5.a) Continuité d'une fonction de la variable réelle

Cas particulier : Soit I un intervalle réel non vide. On note $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 47.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue en $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Remarque 31. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\| \cdot \|$ sur E : elles sont toutes équivalentes !
 f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in I]{} f(a)$

Définition 48.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I

exemple 31. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 42 (continuité et composantes).

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ le sont.