Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Rappels de PCSI : bases orthonormées, projection

On se place dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $< \ | \ >$, et on note $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ la norme associée. On dit aussi que $(E, \| \ \|)$ est un espace euclidien.

I.1 produit scalaire

Définition 1.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$ si
$\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z >=< x; y > +\lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z >=< x; z > +\lambda < y; z >$

Définition 2 (Produit scalaire).

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{symétrique}}$
(i.e. $\forall v, w \in E, < w; v >= < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$

iii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{positive}}$ (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{définie}}$ (i.e. $\forall v \in E, (< v; v >= 0 \ \Rightarrow v = 0_E)$) ;

exemple 1. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :
$< x; y >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, produit scalaire euclidien canonique (p.s. usuel)

exemple 2. Pour $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on pose :
$< f; g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$, produit scalaire sur E.

1.a) norme associée à un produit scalaire

Définition 3.

Si $< \bullet; \bullet >$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\| \ \| :\ x \mapsto \sqrt{< x; x >}$ est
la **norme associée**

Proposition 1 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $<\,;\,>$ et $\| \ \|$ la norme associée.
L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;
ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0\ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;
iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;
iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

démonstration : la positivité et le caractère séparé de la norme découlent directement de la positivité et du caractère défini du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité.
Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. $\square$

Proposition 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $< \bullet ; \bullet >$. Alors $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \leq \sqrt{< u|u >}\sqrt{< v|v >}}$
en particulier, si $\| \ \| \ : x \ \mapsto \sqrt{< x|x >}$, on a : $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \ \leq \ \|u\| \ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :
Soient $x, y \in E$ fixés. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto < x + ty, x + ty >$.
a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :
$\forall t,\ f(t) =< x|x > + < ty|x > + < x|ty > + < ty|ty >=< x|x > +2 < x|y > t+ < y|y > t^2$.
b) $< \ | \ >$ est positive, donc pour tout $t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$.
c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur $\mathbb{R}$).
$\Delta \leq 0 \iff [2 < x|y >]^2 - 4 < y|y >< x|x >\leq 0 \iff 4 < x|y >^2\leq 4 < y|y >< x|x >$
$\iff | < x|y > | \leq \sqrt{< y|y >}\sqrt{< x|x >}$, car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $< \bullet ; \bullet >$. Alors $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \leq \sqrt{< u|u >}\sqrt{< v|v >}}$
en particulier, si $\| \ \| \ : x \ \mapsto \sqrt{< x|x >}$, on a : $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \ \leq \ \|u\| \ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :
Soient $x, y \in E$ fixés. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto < x + ty, x + ty >$.
a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :
$\forall t,\ f(t) =< x|x > + < ty|x > + < x|ty > + < ty|ty >=< x|x > +2 < x|y > t+ < y|y > t^2$.
b) $< \ | \ >$ est positive, donc pour tout $t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$.
c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur $\mathbb{R}$).
$\Delta \leq 0 \iff [2 < x|y >]^2 - 4 < y|y >< x|x >\leq 0 \iff 4 < x|y >^2\leq 4 < y|y >< x|x >$
$\iff | < x|y > | \leq \sqrt{< y|y >}\sqrt{< x|x >}$, car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.2 Rappels : famille orthogonale

Définition 4.

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, est dite **orthogonale** si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow < x_i | x_j >= 0$

Théorème 4 (de Pythagore).

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. alors $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$.

dém : Par bilinéarité : $< \sum_{i=1}^n v_i | \sum_{j=1}^n v_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n < v_i | v_j >= \sum_{i=1}^n < v_i | v_i >$

Proposition 5.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

dém : par Pythagore $0 = \sum \|\lambda_i x_i\|^2$ donc $\lambda_i x_i = 0_E$ pour tout i.

Variante directe : soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < x_i | x_j >= 0$$

Soit $(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad (\star)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a donc $0 =< x_j | 0_E > \underset{(\star)}{=} < x_j | \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i > \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i < x_j | x_i >= \lambda_j \|x_j\|^2$, et x_j non nul donc $\|x_j\|^2 \neq 0$. Ainsi $\lambda_j = 0$. $\square$

I.3 Rappels : base orthogonale

Définition 5 (B.O.N.).

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite **base orthonormée** si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ < e_i | e_j >= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 6 (expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i =< e_i|x >=< x|e_i >}$$

$$\boxed{< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}$$

dém : $x_1, \dots, x_n$ sont les les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $< x|e_i >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k|e_i >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k|e_i >= x_i \|e_i\|^2 = x_i$.

On a :

$$< x|y >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k| \sum_{m=1}^{n} y_m e_m >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} x_k y_m < e_k|e_m >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En particulier, si $y = x$, on a $\|x\|^2 =< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $\square$

Remarque 1. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots y_n \end{pmatrix}$, le calcul de $< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^T Y = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) \in \mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

I.4 Projection orthogonale sur un s.e.-v.

Définition 6 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^\perp$
défini par :
$F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Proposition 7 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie).

Soit $(E, < \ | \ >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et F un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$; il est noté $y = P_F(x)$ et est appelé $\boxed{\textbf{projeté orthogonal}}$ de x sur F.

En outre, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base **orthonormale de F**, alors $\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j|x > u_j.}$

démonstration : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de F.
analyse : Soient $x \in E$ et supposons qu'il existe un vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$.

Comme $y \in F$, $\exists!(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Puisque $x - y \in F^{\perp}$, pour tout $z \in F$, on a $< z; x - y >= 0$. En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $< u_j|x - y >= 0$ (1).

$(1) \iff < u_j|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i >= 0 \iff < u_j|x > - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < u_j|u_i >= 0 \iff \quad \lambda_j =< u_j|x >$, car $\mathcal{B}$ est orthonormale.

On a donc nécessairement $y = \sum_{i=1}^{n} < u_i|x > u_i$ (2).

synthèse : soit y donné par (2). On a $y \in F$. Par ailleurs, soit $z \in F$. Il existe $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.

D'où $< x - y|z >=< x - y| \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i >= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ (< x|u_i > - < y|u_i >) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ (< x|u_i > - < u_i| \ < x|u_i > u_i >) = 0$.
Donc $\forall z \in F, \ < x - y|z >= 0$, donc y convient. $\square$

I.5 Construction de bases orthogonales

Proposition 8 (Algorithme de $\boxed{\textit{Gram-Schmidt}}$).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de vecteurs de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

En posant, $\boxed{g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1}$,

puis, pour i allant de 2 à n, $\boxed{g_i' = f_i - p_{F_{i-1}}(f_i) = f_i - \sum_{\ell=1}^{i-1} < g_\ell|f_i > g_\ell \text{ puis } g_i = \frac{1}{\|g_i'\|} g_i'}$,

la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (g_1, \ldots, g_n) \text{ est une base orthonormée}}$.

En outre $\forall \ 1 \leq i \leq n, \ \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

démonstration :
E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $< \ ; \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée.
On montre par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ la propriété
$\mathcal{P}_k$:

« en posant, $e_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|} f_1$, et pour i allant de 2 à k, $e'_i = f_i - \sum_{k=1}^{i} < e_k|f_i > e_k$ puis $e_i = \dfrac{1}{\|e'_i\|} e'_i$,
la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormale de $F_k = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$. »
initialisation : $F_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ est une droite vectorielle de E, et f_1 est un vecteur non nul de F. Donc $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$ est unitaire et $F = \mathbb{R}e_1$.
hérédité : supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
F_{k+1} est un s-.e.v. de E de dimension $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormé de F_k

Pour $j \in [\![1, k]\!]$, $< e'_j|e'_{k+1} >=< e_j|[f_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell] >$

$$=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} >< e_j|e_\ell >=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > \delta_j^\ell =< e_j|f_{k+1} > - < e_j|f_{k+1} >= 0$$

donc $e'_{k+1} \perp F_k$, et la famille $(e_1, \ldots, e_k, e'_{k+1})$ est orthogonale.

Par ailleurs, comme la famille $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ est libre, et que $\sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, on ne peut pas avoir $e'_{k+1} = 0_E$, donc $e_{k+1} = \dfrac{1}{\|e'_i\|} e'_i$ existe et est unitaire.

Ainsi, d'après ce qui précède, la famille $\mathcal{F}_{k+1} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ est une famille orthonormale, donc libre. Par construction, $F_{k+1} = F_k \oplus \mathrm{Vect}(f_{k+1})$, et $\mathcal{F}_{k+1}$ est contituée de $k+1$ vecteurs de F_{k+1} de dimension $k+1$, donc en est une base orthonormale, ce qui montre la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$. □

I.6 Rappels : Somme directe orthogonale

Définition 7 (s.e.v. orthogonaux).

On dit deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si : $\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ < f|g >= 0$.

Proposition 9 (somme directe orthogonale).

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux**, alors la somme $F + G$ est directe. On dit qu'elle est **directe orthogonale**, et on note $F + G = F \oplus G = F \oplus^\perp G$.

dém : Pour $x \in F \cap G$, on a $< x|x >= 0$, donc $x = 0_E$. □

Proposition 10 (somme directe orthogonale).

Pour E de dimension finie, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\boxed{E = F \oplus^\perp F^\perp}$.
$\boxed{\dim(F^\perp) = \dim E - \dim(F)}$

démonstration : En effet comme $F \perp F^\perp$, on a $F + F^\perp = F \oplus^\perp F^\perp \subset E$

pour $x \in E$, on a $x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \in F + F^{\perp}$. $\square$

Terminologie : pour E e.v. de dimension finie, et F un s.e.v. de E, on dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.

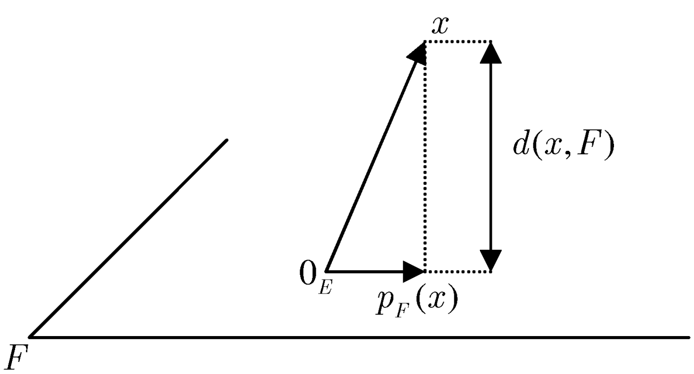
I.7 Rappels : distance à un s.e.v.

Proposition 11 (inégalité de Bessel).

Si F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de l'espace vectoriel E et $x \in E$ fixé.
Alors :

$$\forall x \in E,\ \|x\| \geq \|P_F(x)\|$$

De plus le vecteur $P_F(x)$ est l'unique vecteur $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = \min\limits_{y \in F} \|x - y\|$



dém :

- La relation $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ implique $\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) > +\|P_F(x)\|^2$ donc que $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + d(x,F)^2 \geq \|P_F(x)\|^2$. d'où $\|x\| \geq \|P_F(x)\|$

- On va ensuite montrer que l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$ atteint son minimum en un unique point y_{min} de F, qui est $y_0 = P_F(x)$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, on a dans la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$:
$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$.
Donc
$\|x-y\|^2 = \|(x - P_F(x)) + P_F(x) - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) - y > +\|P_F(x) - y\|^2$
$= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|P_F(x) - y\|^2$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$.

Donc $\|x - y\| \geq \|P_F(x) - y\|$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 2. Ainsi $d(x,F) = \inf\{\|x-y\|;\ y \in F\} = \|x - P_F(x)\|$. est la distance de x à F.

II. Isométries

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E est, muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et on note $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ la norme associée. On dit aussi que $(E, \| \ \|)$ est un espace euclidien.

II.1 Isométries, normes et produit scalaire

1.a) Définition

Définition 8.

Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une **isométrie** vectorielle s'il conserve la norme.
On note $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$ l'ensemble des isométries de E.

1.b) Propriétés

Proposition 12.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme, alors u est bijectif, donc est un automorphisme.

démonstration :

Si $x \in E$ est tel que $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc par caractère défini de la norme $\| \ \|$, on a $x = 0_E$. D'où $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est vrai car $\mathrm{Ker}(u)$ est un s.-e.v., donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc u est injective.

Mais alors u est un endomorphisme injectif, donc (conséquence du théorème du rang) u est bijectif. $\square$

Terminologie 9.

On appelle **automorphisme orthogonal** de E toute **isométrie** de E.

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors u est une isométrie si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \ < u(x)|u(y) > = < x|y >$$

démonstration : Si u conserve le produit scalaire, alors pour $x \in E$, on a :
$\|u(x)\| = \sqrt{< u(x)|u(x) >} \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \sqrt{< x|x >} = \|x\|$, donc u conserve la norme.

Si u conserve la norme, alors pour $x, y \in E$, on a :
$< u(x)|u(y) > \underset{polarisation}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \underset{lin}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)$
$\underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \underset{polarisation}{=} < x|y >$, donc u conserve le produit scalaire. $\square$

Proposition 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est une isométrie

ii) Pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u de toute base orthonormée est une base orthonormée

iii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u d'une base orthonormée est une base orthonormée

démonstration : $i) \Rightarrow ii)$ découle de la propriété précédente : pour $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une b.o.n., on a pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\delta_i^j =< e_i | e_j > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(e_i) | u(e_j) >$$

$ii) \Rightarrow iii)$ est immédiat.

$iii) \Rightarrow i)$:

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ b.o.n. telle que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ b.o.n., on a pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, comme par linéarité $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$, en utilisant la formule de calcul de la norme à l'aide des décompositions dans des b.o.n. : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|u(x)\|$.

□

lemme 15. *Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors $u(F) = F$

démonstration : la restriction de u à F, $u_{|F} : F \to F$, la restriction de u à F, est injective. Comme F est de dimension finie, elle est donc bijective.

Proposition 16.

Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^{\perp} = \{y \in E ; \ \forall x \in F, \ < x | y >= 0\}$ est stable par u.

démonstration : Pour $y \in F^{\perp}$, on a : pour tout $x \in F$, $0 =< x | y > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(x) | u(y) >$, donc $u(y)$ est orthogonal à $u(F) = F$ (d'après le lemme).

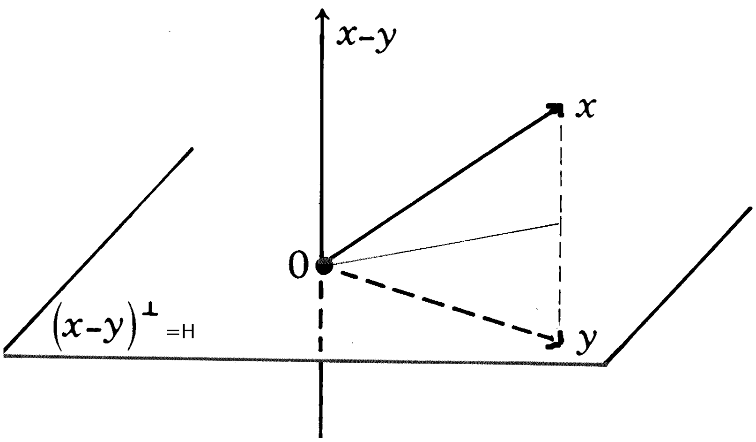
Ainsi, $u(y) \in F^{\perp}$. □

II.2 Réflexions

Définition 10.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour tout sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$ de E de dimension $n-1$, on appelle **réflexion** par rapport à H (ou d'axe la droite $H^\perp$) la symétrie s_H par rapport à F dans la direction $H^\perp$ définie par :

$$\forall h \in H, d \in H^\perp,\ s_H(h+d) = h - d$$



Proposition 17.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$, la matrice de la réflexion s_F par rapport à F de dimension $n-1$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

exemple 3. Réflexion en dimension 2 :

Pour $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^2$, le vecteur $w = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est tel que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E adaptée à la somme directe $H = \text{Vect}(v) \oplus^\perp \text{Vect}(w)$.

La réflexion s_H par rapport à $H = \text{Vect}(v)$est donnée par :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ s_H(\alpha v + \beta w) = \alpha v - \beta w$.
$Mat_{\mathcal{B}'}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et pour $P = Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, on a :
$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

exemple 4. Réflexion en dimension 3 :

Pour $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^3$, et des vecteur v, w tels que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base orthonormée de E adaptée à la somme directe $H = \text{Vect}(u, v) \oplus^\perp \text{Vect}(w)$.

La réflexion s_H par rapport à $H = \text{Vect}(u, v)$est donnée par :
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ s_H(\alpha u + \beta v + \gamma w) = \alpha u + \beta v - \gamma w$.
$Mat_{\mathcal{B}'}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

II.3 Matrices orthogonales

Définition 11 (Matrice orthogonale).

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est **canoniquement associé** est une **isométrie vectorielle**.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 18.

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.

démonstration : Notons $\mathcal{B}_{can} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, orthonormale de $E = \mathbb{R}^n$, et u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Notons $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ les vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$ correspondants canoniquement respectivements aux vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ de la matrice M.

M est orthogonale ssi u isométrie
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < e_i | e_j >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < u(e_i) | u(e_j) >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ C_i^T \ \times \ C_j = (\delta_i^j) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$
ssi $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.

L'inverse N à droite de M est nécessairement inverse à gauche, car $MN = I_n$ et $PM = I_n$ impliquent $P = PMN = N$ $\square$

Proposition 19.

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est une matrice de changement de bases orthonormales

démonstration : c.f. caractérisation par l'image d'une b.o.n :

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M. La base canonique $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ est une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$.

M orthogonale $\iff u \in \mathcal{O}(E) \underset{carac}{\iff} \mathcal{B}' = u(\mathcal{B}) = (C_1 \dots, C_n)$ b.o.n. de $E \iff M$ matrice de changement de b.o.n. $\square$

Remarque 3. Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors ses colonnes $(C_1, \dots, c_n)$ forment une base orthonormée de $M \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

H.P. : dans le cas $n = 3$ il suffit de vérifier $\|C_1\| = 1 = \|C_2\|$ et $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$

II.4 Groupe orthogonal

Proposition 20 (Groupe Orthogonal).

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible, $B^{-1} = B^T$, et $(AB^T)^T(AB^T) = BA^TAB^T = BB^T = I_n$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. □

Proposition 21 (Groupe Orthogonal).

Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

démonstration : $1 = \det(I_n) = \det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$. □

Définition 12.

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est appelé **groupe spécial orthogonal**, et est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble des isométries de déterminant égal à 1 est appelé **groupe des isométries directes**, et est noté $\mathrm{SO}(n)$.

Proposition 22 (Groupe Spécial Orthogonal).

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible et on a vu $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
et comme $\det(B) = 1$, on a $\det(B^-1) = 1$, donc $\det(AB^{-1}) = 1$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. □

II.5 Orientation d'un espace euclidien

Remarque 4. Par convention, on choisit de dire que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée directe.
Pour toute autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:
— si $\det(P) = 1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée directe.
— si $\det(P) = -1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a orientation contraire à $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée indirecte.

III. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

III.1 Groupe orthogonal du plan

Proposition 23 (Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$).

Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :

1. $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$.
2. $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

démonstration : $M = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$. Comme $M^TM = I_2$, on a $\begin{cases} a^2+b^2 &= 1\\ ac+bd &= 0\\ c^2+d^2 &= 1\end{cases}$

On remarque qu'il existe $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ tels que $\begin{cases} a &= \cos(\theta)\\ b &= \sin(\theta)\end{cases}$ et $\begin{cases} c &= \cos(\varphi)\\ d &= \sin(\varphi)\end{cases}$

En effet, dans le cas $b \geq 0$, on a $a \in [-1,1]$, et en posant $\theta = \mathrm{Arccos}(a) \in [0,\pi]$, on obtient $a = \cos\theta$ et comme $\sin\theta \geq 0$ et $1-a^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta = b^2$, on a $0 \leq b = \sin\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [0,1]$, en posant $\theta = \mathrm{Arcsin}\,\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on obtient $b = \sin\theta$ et comme $\cos\theta \geq 0$ et $1-b^2 = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta = a^2$, on a $0 \leq a = \cos\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [-1, 0[$, comme $-b > 0$ et $-a > 0$, on sait qu'il existe $\omega \in [0, \pi/2]$ tel que $-a = \cos\omega$ et $-b = \sin\omega$. Mais alors $a = \cos(\omega - \pi)$ et $b = \sin(\omega - \pi)$; il suffit de poser $\theta = \omega - \pi \in]-\pi, -\pi/2]$.

De même pour φ.

$\begin{cases} ac+bd &= 0\\ ad-bc &= \det(M)\end{cases}$, donc $\begin{cases} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi &= 0\\ \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi &= \det(M)\end{cases}$, soit $\begin{cases} \cos(\theta-\varphi) &= 0\\ \sin(\theta-\varphi) &= \det(M) \in \{-1,1\}\end{cases}$

Car $\det(M)^2 = \det(M^TM) = \det(I_2) = 1$

Si $\det(M) = 1$, alors $\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$

Si $\det(M) = -1$, alors $\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$ $\square$

Proposition 24 (Détermination des matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$).

On a $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} ;\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

démonstration : corollaire direct en calculant les déterminants

Définition 13.

L'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est appelé “groupe des rotations planes. Il est stable par produit et par passage à l'inverse.

Proposition 25 (Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$).

Pour toutes matrices de rotations $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$, on a :

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

démonstration : on fait le produit, et on remarque que $\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta+\theta')$, etc... $\square$.

Remarque 5. L'inverse se calcule directement !

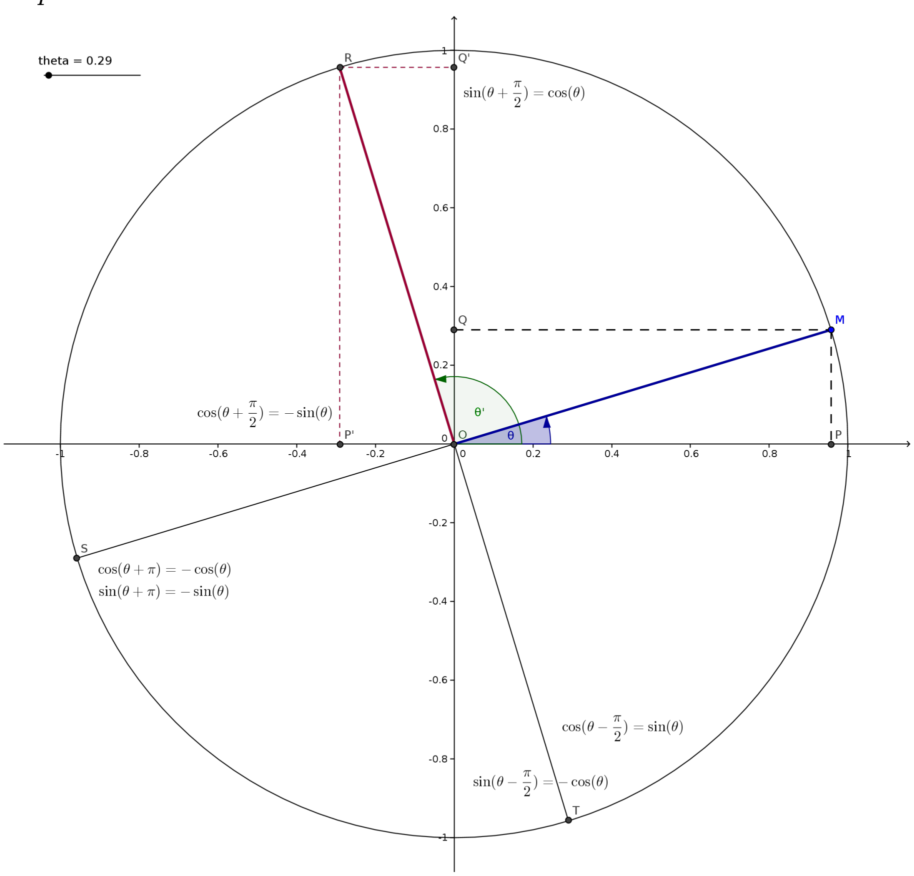
Définition 14 (Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté).

On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit en outre que θ est une mesure (à 2π près) de l'angle de la rotation r.

Remarque 6. Lorsque l'on choisit $\theta \in [-\pi, \pi[$, il est alors uniquement déterminé, et l'on parle parfois de *mesure principale*.



Proposition 26.

Si r est la rotation plane d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ du plan, on a :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dém : Soit r une rotation plane

Par définition, il existe une base orthonormée Pour $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$M' = Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique. Posons $M = Mat_{\mathcal{B}}(r)$

Pour $P = Pass_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $M = PM'P^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ □

Proposition 27 (Écriture complexe d'une rotation).

Si r est la rotation plane d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, alors en identifiant les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à leurs affixes complexes $a + \mathbf{i}b$, r correspond à la transformation complexe :

$$\rho_\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{\mathbf{i}\theta} z \end{array}$$

démonstration : Pour a, b réels, et $\theta \in \mathbb{R}$, on a, pour $z = a + \mathbf{i}b$:

$\rho_\theta(z) = e^{\mathbf{i}\theta} z = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin(\theta))(a + \mathbf{i}b) = (a\cos\theta - b\sin\theta) + \mathbf{i}(a\sin\theta + b\cos\theta)$, qui correspond au calcul matriciel :

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}$. □

Remarque 7. On a $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta = \rho_{\theta+\theta'}$.

III.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Proposition 28.

Dans le plan euclidien, la composée de deux réflexions est une rotation plane.

démonstration : il s'agit d'une isométrie, de déterminant $(-1) \times (-1) = 1$, donc d'une rotation plane.□

Théorème 29 (Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien).

Les isométries du plan sont soit les rotations, soit les réflexions.

démonstration :

Si le déterminant vaut 1, on a une rotation d'angle θ.

Si le déterminant vaut -1, avec $M=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$, on a :

$\chi_M=(X-\cos\theta)(X+\cos\theta)-\sin^2\theta=X^2-1=(X-1)(X+1)$.

Il y a donc deux valeurs propres distinctes 1 et -1 de multiplicités respectives 1, et la matrice est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$: on reconnaît la matrice d'une réflexion par rapport à la droite $F=\mathrm{Ker}(u-id_E)$.

□

Remarque 8. Dans le cas d'une réflexion, on peut déterminer explicitement F en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcl}\cos(\theta)x-\sin(\theta)y & = & x\\ \sin(\theta)x+\cos(\theta)y & = & y\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}(\cos(\theta)-1)x-\sin(\theta)y & = & 0\\ \sin(\theta)x+(\cos(\theta)-1)y & = & 0\end{array}\right.\quad(S)$$

- Dans le cas $\theta=0 \bmod 2\pi$, tout vecteur convient, et on reconnaît l'identité, ce qui est impossible pour le déterminant égal à -1.
- Dans le cas $\theta=\pi \bmod 2\pi$, $(S)\iff x=0$, donc $v=(0;1)$ dirige F.
- Sinon, on a $\sin\theta\neq 0$ et $(S)\iff y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}x$, donc $v=\left(1;\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ dirige F.

IV. Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

IV.1 Définition

Définition 15 (Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien)**.**

Un endomorphisme $e\in\mathcal{L}(E)$ est dit **symétrique** si :

$$\forall x,y\in E,\ <u(x)|y>=<x|u(y)>$$

IV.2 Matrice dans une base orthonormée

Proposition 30.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

démonstration : Soient $u\in\mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $C_1\dots,C_n$ les colonnes de $M=Mat_{\mathcal{B}}(u)$, et $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Si u est un endomorphisme symétrique, alors, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a : $<u(e_i)|e_j>=<e_i|u(e_j)>$, donc $(ME_i)^TE_j=(E_i)^TME_j$, donc $(C_i)^TE_j=(E_i)^TC_j$, donc $m_{ji}=m_{ij}$, donc M est symétrique réelle.

- Si M est symétrique réelle, $X^TMY=X^TM^TY=(MX)^TY$ pour tous $X,Y\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc pour tous $x,y\in E$, $<u(x)|y>=<x|u(y)>$ □

variante longue : pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, *on a :* $m_{ji} = m_{ij}$ *donc* $(C_i)^T E_j = (E_i)^T C_j$, *donc* $(ME_i)^T E_j = (E_i)^T M E_j$, *donc* $< u(e_i)|e_j >=< e_i|u(e_j) >$.

Ainsi pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *et* $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$, *on a :*

$< u(x)|y > \underset{bilin.}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < u(e_i)|e_j >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i|u(e_j) > \underset{bilin.}{=} < x|u(y) >$ *donc* u *est un endomorphisme symétrique.*

V. Réduction des endomorphismes symétriques

V.1 Valeurs propres

lemme 31. Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.Alors toute valeur propre de A est réelle.

démonstration :
Pour $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $X \neq 0$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $AX = \lambda X$:
On a en conjuguant $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est réelle.
Mais alors
$\lambda X^T \overline{X} = (AX)^T \overline{X} = X^T A^T \overline{X} = X^T A \overline{X} = X^T \overline{AX} = X^T \overline{\lambda X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$, donc

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

□

lemme 32. Soit u un endomorphisme symétrique de E euclidien. Alors toute valeur propre de u est réelle.

démonstration : Soit A la matrice de u dans la base canonique est symétrique réelle. □

V.2 Sous-espaces propres

lemme 33. Soit u un endomorphisme symétrique de E euclidien, et F un sous-espace stable de u.
Alors $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$.
Alors toute valeur propre de u est réelle.

démonstration :

- La stabilité de $F^\perp$ par u résulte du calcul, pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$, $< u(y)|x >=< y|u(x) >= 0$ car $u(x) \in F$, donc $u(y) \in F^\perp$.

- Pour tous $x, y \in F^\perp$ $< u(x)|y >=< x|u(y) >$, donc $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$ □

V.3 Diagonalisation

Théorème 34 (Théorème spectral).

un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. (associés à des valeurs propres réelles)

Démonstration (non exigible) : par récurrence sur $n = \dim(E)$.

• Initialisation : le cas $n = 1$ est immédiat.

• Initialisation : Supposons la propriété vraie pour tout endomorphisme symétrique sur un espace euclidien de dimension n, pour $n \geq 1$ fixé.

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, u un endomorphisme symétrique de E, λ une valeur propre (réelle) de u, et v un vecteur propre associé.

En posant $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v)$, on sait que $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$. Comme $u_{|F^{\perp}}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $F^{\perp}$ de dimension n, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_{F^{\perp}}$ de $F^{\perp}$ formée de vecteurs propres de u.

Mais alors la famille $\mathcal{B} = (v, \mathcal{B}_{F^{\perp}})$ est une base de E, adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$, et formée de vecteurs propres de u. $\square$

Théorème 35 (théorème spectral, version matrices symétriques réelles).

Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que

$$P^T A P = D$$

démonstration : il s'agit de la formule de changement de base, pour P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise l'endomorphisme u canoniquement associé à A. $\square$

exemple 5. Attention, pour une matrice symétrique complexe, on ne sait rien !

$M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, $\chi_M = (X-1)(X+1) - 1 = X^2$, et M n'est pas semblable à 0_2

V.4 Complément

Si M est une matrice symétrique réelle, dont les valeurs propres sont toutes dans $]0, +\infty[$, alors $\varphi_M : (X,Y) \longmapsto X^T M Y$ définit un poduit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Programme PC :

Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

— *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*

— *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classifier en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*

— *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace euclidien.	
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté.	Écriture complexe d'une rotation.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

Contenus	Capacités & Commentaires

d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.	Démonstration non exigible.
Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.	