Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Rappels de PCSI : bases orthonormées, projection

On se place dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $< \ | \ >$, et on note $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ la norme associée. On dit aussi que $(E, \| \ \|)$ est un espace euclidien.

I.1 Rappels : famille orthogonale

Définition 1.

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, est dite **orthogonale** si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow < x_i|x_j >= 0$

Théorème 1 (de Pythagore).

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

dém : Par bilinéarité : $< \sum_{i=1}^{n} v_i | \sum_{j=1}^{n} v_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < v_i|v_j >= \sum_{i=1}^{n} < v_i|v_i >$

Proposition 2.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

dém : par Pythagore $0 = \sum \|\lambda_i x_i\|^2$ donc $\lambda_i x_i = 0_E$ pour tout i.

Variante directe : soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < x_i|x_j >= 0$$

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad (\star)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a donc $0 =< x_j|0_E > \underset{(\star)}{=} < x_j| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i > \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x_j|x_i >= \lambda_j \|x_j\|^2$, et x_j non nul donc $\|x_j\|^2 \neq 0$. Ainsi $\lambda_j = 0$. $\square$

I.2 Rappels : base orthogonale

Définition 2 (B.O.N.).

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite **base orthonormée** si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ < e_i|e_j >= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 3 (expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i =< e_i|x >=< x|e_i >}$$

$$\boxed{< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}$$

dém : $x_1, \dots, x_n$ sont les les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $< x|e_i >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k|e_i >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k|e_i >= x_i \|e_i\|^2 = x_i$.

On a :

$$< x|y >=< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k| \sum_{m=1}^{n} y_m e_m >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} x_k y_m < e_k|e_m >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En particulier, si $y = x$, on a $\|x\|^2 =< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $\square$

Remarque 1. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots y_n \end{pmatrix}$, le calcul de $< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^T Y = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right) \in \mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

I.3 Projection orthogonale sur un s.e.-v.

Définition 3 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^\perp$
défini par :
$F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Proposition 4 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie).

Soit $(E, < \; | \; >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et F un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$; il est noté $y = P_F(x)$ et est appelé **projeté orthogonal** de x sur F.

En outre, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base **orthonormale de F**, alors $\boxed{P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j | x > u_j.}$

démonstration : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de F.
analyse : Soient $x \in E$ et supposons qu'il existe un vecteur $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$.

Comme $y \in F$, $\exists !(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Puisque $x - y \in F^{\perp}$, pour tout $z \in F$, on a $< z; x - y >= 0$. En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $< u_j | x - y >= 0$ (1).

(1) $\iff < u_j | x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i >= 0 \iff < u_j | x > - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < u_j | u_i >= 0 \iff \lambda_j =< u_j | x >$, car $\mathcal{B}$ est orthonormale.

On a donc nécessairement $y = \sum_{i=1}^{n} < u_i | x > u_i$ (2).

synthèse : soit y donné par (2). On a $y \in F$. Par ailleurs, soit $z \in F$. Il existe $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; $z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$.

D'où $< x - y | z >=< x - y | \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i >= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(< x | u_i > - < y | u_i >\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(< x | u_i > - < u_i | \; < x | u_i > u_i >\right) = 0$.
Donc $\forall z \in F, \; < x - y | z >= 0$, donc y convient. □

I.4 Construction de bases orthogonales

Proposition 5 (Algorithme de $\boxed{\textit{Gram-Schmidt}}$).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de vecteurs de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

En posant, $\boxed{g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1}$,

puis, pour i allant de 2 à n, $\boxed{g'_i = f_i - p_{F_{i-1}}(f_i) = f_i - \sum_{\ell=1}^{i-1} < g_\ell | f_i > g_\ell \text{ puis } g_i = \frac{1}{\|g'_i\|} g'_i}$,

la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (g_1, \ldots, g_n) \text{ est une base orthonormée}}$.

En outre $\forall \; 1 \leq i \leq n, \; \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

démonstration :

E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $< \; ; \; >$, et $\| \; \|$ la norme associée.
On montre par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ la propriété
$\mathcal{P}_k$:

« en posant, $e_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|} f_1$, et pour i allant de 2 à k, $e'_i = f_i - \sum_{k=1}^{i} < e_k|f_i > e_k$ puis $e_i = \dfrac{1}{\|e'_i\|} e'_i$,
la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormale de $F_k = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. »
initialisation : $F_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ est une droite vectorielle de E, et f_1 est un vecteur non nul de F. Donc $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$ est unitaire et $F = \mathbb{R}e_1$.
hérédité : supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
F_{k+1} est un s-.e.v. de E de dimension $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormé de F_k

Pour $j \in [\![1, k]\!]$, $< e'_j|e'_{k+1} >=< e_j|[f_{k+1} - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell] >$

$$=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} >< e_j|e_\ell >=< e_j|f_{k+1} > - \sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > \delta_j^\ell =< e_j|f_{k+1} > - < e_j|f_{k+1} >= 0$$

donc $e'_{k+1} \perp F_k$, et la famille $(e_1, \dots, e_k, e'_{k+1})$ est orthogonale.

Par ailleurs, comme la famille $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est libre, et que $\sum_{\ell=1}^{k} < e_\ell|f_{k+1} > e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, on ne peut pas avoir $e'_{k+1} = 0_E$, donc $e_{k+1} = \dfrac{1}{\|e'_i\|} e'_i$ existe et est unitaire.

Ainsi, d'après ce qui précède, la famille $\mathcal{F}_{k+1} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ est une famille orthonormale, donc libre. Par construction, $F_{k+1} = F_k \oplus \mathrm{Vect}(f_{k+1})$, et $\mathcal{F}_{k+1}$ est contituée de $k+1$ vecteurs de F_{k+1} de dimension $k+1$, donc en est une base orthonormale, ce qui montre la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$. □

I.5 Rappels : Somme directe orthogonale

Définition 4 (s.e.v. orthogonaux).

On dit deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si : $\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ < f|g >= 0$.

Proposition 6 (somme directe orthogonale).

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux**, alors la somme $F + G$ est directe. On dit qu'elle est **directe orthogonale**, et on note $F + G = F \oplus G = F \oplus^\perp G$.

dém : Pour $x \in F \cap G$, on a $< x|x >= 0$, donc $x = 0_E$. □

Proposition 7 (somme directe orthogonale).

Pour E de dimension finie, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\boxed{E = F \oplus^\perp F^\perp}$.
$\boxed{\dim(F^\perp) = \dim E - \dim(F)}$

démonstration : En effet comme $F \perp F^\perp$, on a $F + F^\perp = F \oplus^\perp F^\perp \subset E$

pour $x \in E$, on a $x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \in F + F^{\perp}$. $\square$

Terminologie : pour E e.v. de dimension finie, et F un s.e.v. de E, on dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.

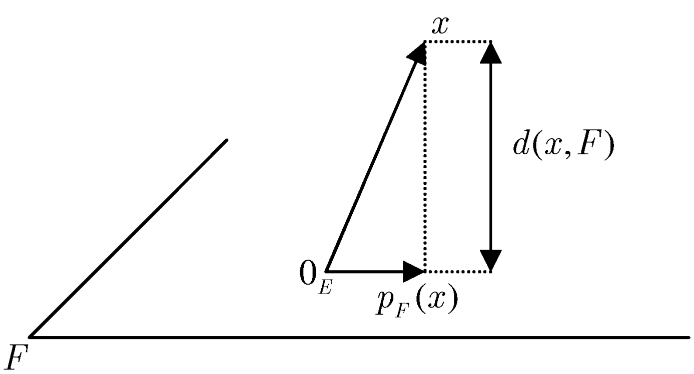
I.6 Rappels : distance à un s.e.v.

Proposition 8 (inégalité de Bessel).

Si F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de l'espace vectoriel E et $x \in E$ fixé.
Alors :

$$\forall x \in E, \ \ \|x\| \geq \|P_F(x)\|$$

De plus le vecteur $P_F(x)$ est l'unique vecteur $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = \min\limits_{y \in F} \|x - y\|$



dém :

• La relation $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ implique $\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) > + \|P_F(x)\|^2$ donc que $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + d(x,F)^2 \geq \|P_F(x)\|^2$. d'où $\|x\| \geq \|P_F(x)\|$

• On va ensuite montrer que l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|x - y\| \end{array}$ atteint son minimum en un unique point y_{min} de F, qui est $y_0 = P_F(x)$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, on a dans la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$:
$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$.
Donc
$\|x - y\|^2 = \|(x - P_F(x)) + P_F(x) - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + 2 < x - P_F(x)|P_F(x) - y > + \|P_F(x) - y\|^2$
$= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|P_F(x) - y\|^2$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$.

Donc $\|x - y\| \geq \|P_F(x) - y\|$ avec égalité ssi $y = P_F(x)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 2. Ainsi $d(x,F) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in F\} = \|x - P_F(x)\|$. est la distance de x à F.

II. Espaces euclidiens

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E est, muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et on note $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$ la norme associée. On dit aussi que $(E, \| \ \|)$ est un espace euclidien.

II.1 Isométries vectorielles

1.a) Définition

Définition 5.

Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une **isométrie** vectorielle s'il conserve la norme.
On note $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$ l'ensemble des isométries de E.

1.b) Propriétés

Proposition 9.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme, alors u est bijectif, donc est un automorphisme.

démonstration :

Si $x \in E$ est tel que $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc par caractère défini de la norme $\| \ \|$, on a $x = 0_E$. D'où $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est vrai car $\mathrm{Ker}(u)$ est un s.-e.v., donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc u est injective.

Mais alors u est un endomorphisme injectif, donc (conséquence du théorème du rang) u est bijectif. $\square$

Terminologie 6.

On appelle **automorphisme orthogonal** de E toute **isométrie** de E.

Proposition 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors u est une isométrie si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \ < u(x)|u(y) > = < x|y >$$

démonstration : Si u conserve le produit scalaire, alors pour $x \in E$, on a :
$\|u(x)\| = \sqrt{< u(x)|u(x) >} \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \sqrt{< x|x >} = \|x\|$, donc u conserve la norme.

Si u conserve la norme, alors pour $x, y \in E$, on a :
$$< u(x)|u(y) > \underset{polarisation}{=} \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \underset{lin}{=} \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)$$
$$\underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \underset{polarisation}{=} < x|y >,$$ donc u conserve le produit scalaire. $\square$

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E euclidien muni du produit scalaire $< \ | \ >$, et $\| \ \|$ la norme associée. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est une isométrie

ii) Pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u de toute base orthonormée est une base orthonormée

iii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est base orthonormée de E.
i.e. l'image par u d'une base orthonormée est une base orthonormée

démonstration : $i) \Rightarrow ii)$ découle de la propriété précédente : pour $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une b.o.n., on a pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\delta_i^j =< e_i | e_j > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(e_i) | u(e_j) >$$

$ii) \Rightarrow iii)$ est immédiat.

$iii) \Rightarrow i)$:

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n. telle que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ b.o.n., on a pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, comme par linéarité $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$, en utilisant la formule de calcul de la norme à l'aide des décompositions dans des b.o.n. : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|u(x)\|$.

□

lemme 12. *Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors $u(F) = F$

démonstration : la restriction de u à F, $u_{|F} : F \to F$, la restriction de u à F, est injective. Comme F est de dimension finie, elle est donc bijective.

Proposition 13.

Soient $u \in \mathrm{O}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp = \{y \in E ;\ \forall x \in F,\ < x | y >= 0\}$ est stable par u.

démonstration : Pour $y \in F^\perp$, on a : pour tout $x \in F$, $0 =< x | y > \underset{u \in \mathrm{O}(E)}{=} < u(x) | u(y) >$, donc $u(y)$ est orthogonal à $u(F) = F$ (d'après le lemme).

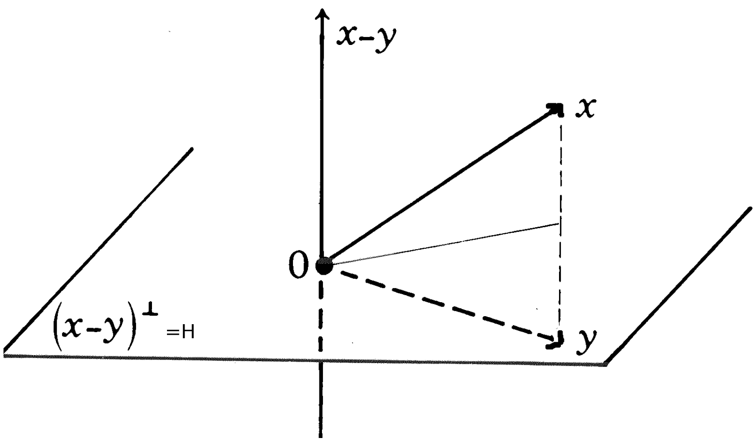
Ainsi, $u(y) \in F^\perp$. □

II.2 Réflexions

Définition 7.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour tout sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$ de E de dimension $n-1$, on appelle **réflexion** par rapport à H (ou d'axe la droite $H^\perp$) la symétrie s_H par rapport à F dans la direction $H^\perp$ définie par :

$$\forall h \in H, d \in H^\perp,\ s_H(h+d) = h - d$$



Proposition 14.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$, la matrice de la réflexion s_F par rapport à F de dimension $n-1$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

exemple 1. Réflexion en dimension 2 :

Pour $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^2$, le vecteur $w = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est tel que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E adaptée à la somme directe $H = \text{Vect}(v) \oplus^\perp \text{Vect}(w)$.

La réflexion s_H par rapport à $H = \text{Vect}(v)$est donnée par :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ s_H(\alpha v + \beta w) = \alpha v - \beta w$.
$Mat_{\mathcal{B}'}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et pour $P = Pass_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, on a :
$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

exemple 2. Réflexion en dimension 3 :

Pour $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^3$, et des vecteur v, w tels que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base orthonormée de E adaptée à la somme directe $H = \text{Vect}(u, v) \oplus^\perp \text{Vect}(w)$.

La réflexion s_H par rapport à $H = \text{Vect}(u, v)$est donnée par :
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ s_H(\alpha u + \beta v + \gamma w) = \alpha u + \beta v - \gamma w.$
$Mat_{\mathcal{B}'}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

II.3 Matrices orthogonales

Définition 8 (Matrice orthogonale).

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est **canoniquement associé** est une **isométrie vectorielle**.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 15.

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.

démonstration : Notons $\mathcal{B}_{can} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, orthonormale de $E = \mathbb{R}^n$, et u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Notons $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ les vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$ correspondants canoniquement respectivements aux vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ de la matrice M.

M est orthogonale ssi u isométrie
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < e_i | e_j >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ < u(e_i) | u(e_j) >= \delta_i^j$
ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ C_i^T \ \times \ C_j = (\delta_i^j) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$
ssi $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.

L'inverse N à droite de M est nécessairement inverse à gauche, car $MN = I_n$ et $PM = I_n$ impliquent $P = PMN = N$ $\square$

Proposition 16.

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est une matrice de changement de bases orthonormales

démonstration : c.f. caractérisation par l'image d'une b.o.n :

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M. La base canonique $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ est une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$.

M orthogonale $\Longleftrightarrow u \in \mathcal{O}(E) \underset{carac}{\Longleftrightarrow} \mathcal{B}' = u(\mathcal{B}) = (C_1 \dots, C_n)$ b.o.n. de $E \Longleftrightarrow M$ matrice de changement de b.o.n. $\square$

Remarque 3. Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors ses colonnes $(C_1, \dots, c_n)$ forment une base orthonormée de $M \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

H.P. : dans le cas $n = 3$ il suffit de vérifier $\|C_1\| = 1 = \|C_2\|$ et $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$

II.4 Groupe orthogonal

Proposition 17 (Groupe Orthogonal).

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible, $B^{-1} = B^T$, et $(AB^T)^T(AB^T) = BA^TAB^T = BB^T = I_n$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 18 (Groupe Orthogonal).

Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

démonstration : $1 = \det(I_n) = \det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$. $\square$

Définition 9.

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est appelé **groupe spécial orthogonal**, et est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble des isométries de déterminant égal à 1 est appelé **groupe des isométries directes**, et est noté $\mathrm{SO}(n)$.

Proposition 19 (Groupe Spécial Orthogonal).

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par passage à l'inverse, et stable par produit :
$\forall A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

démonstration : $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a B inversible et on a vu $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
et comme $\det(B) = 1$, on a $\det(B^-1) = 1$, donc $\det(AB^{-1}) = 1$, donc $AB^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. $\square$

II.5 Orientation d'un espace euclidien

Remarque 4. Par convention, on choisit de dire que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée directe.
Pour toute autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:
— si $\det(P) = 1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée directe.
— si $\det(P) = -1$, on dit que $\mathcal{B}'$ a orientation contraire à $\mathcal{B}$ et est une base orthonormée indirecte.

III. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

III.1 Groupe orthogonal du plan

Proposition 20 (Détermination des matrices de $O_2(\mathbb{R})$).

Toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :

1. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$.
2. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

démonstration : $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Comme $M^T M = I_2$, on a $\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ ac+bd & = & 0 \\ c^2+d^2 & = & 1 \end{array}\right.$

On remarque qu'il existe $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ tels que $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \cos(\theta) \\ b & = & \sin(\theta) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} c & = & \cos(\varphi) \\ d & = & \sin(\varphi) \end{array}\right.$

En effet, dans le cas $b \geq 0$, on a $a \in [-1,1]$, et en posant $\theta = \operatorname{Arccos}(a) \in [0, \pi]$, on obtient $a = \cos\theta$ et comme $\sin\theta \geq 0$ et $1 - a^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta = b^2$, on a $0 \leq b = \sin\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [0,1]$, en posant $\theta = \operatorname{Arcsin}\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on obtient $b = \sin\theta$ et comme $\cos\theta \geq 0$ et $1 - b^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta = a^2$, on a $0 \leq a = \cos\theta$.
Dans le cas $b < 0$ et $a \in [-1, 0[$, comme $-b > 0$ et $-a > 0$, on sait qu'il existe $\omega \in [0, \pi/2]$ tel que $-a = \cos\omega$ et $-b = \sin\omega$. Mais alors $a = \cos(\omega - \pi)$ et $b = \sin(\omega - \pi)$; il suffit de poser $\theta = \omega - \pi \in]-\pi, -\pi/2]$.

De même pour φ.

$\left\{\begin{array}{rcl} ac+bd & = & 0 \\ ad-bc & = & \det(M) \end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi & = & 0 \\ \cos\theta\sin\varphi - sin\theta\cos\varphi & = & \det(M) \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\varphi-\theta) & = & 0 \\ \sin(\varphi-\theta) & = & \det(M) \in \{-1, 1\} \end{array}\right.$

Car $\det(M)^2 = \det(M^T M) = \det(I_2) = 1$

Si $\det(M) = 1$, alors $\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Si $\det(M) = -1$, alors $\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\square$

Proposition 21 (Détermination des matrices de $SO_2(\mathbb{R})$).

On a $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} ;\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

démonstration : corollaire direct en calculant les déterminants

Définition 10.

L'ensemble $SO_2(\mathbb{R})$ est appelé "groupe des rotations planes. Il est stable par produit et par passage à l'inverse.

Proposition 22 (Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$).

Pour toutes matrices de rotations $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$, on a :

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

démonstration : on fait le produit, et on remarque que $\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta+\theta')$, etc... $\square$.

Remarque 5. L'inverse se calcule directement !

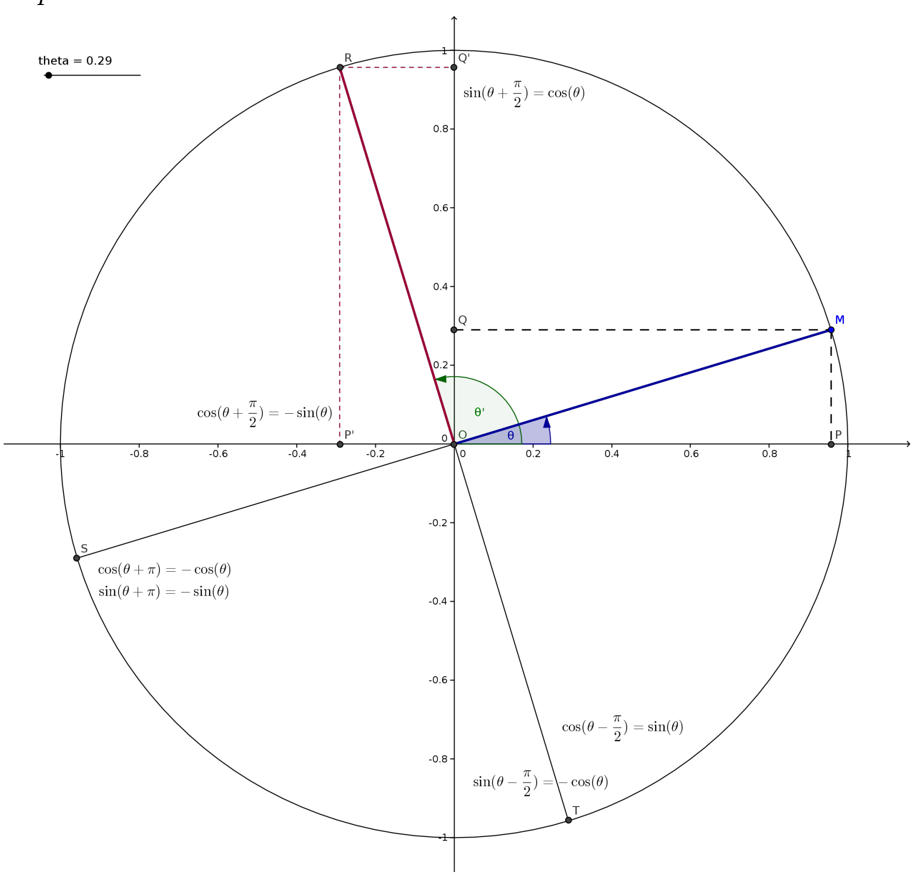
Définition 11 (Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté).

On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit en outre que θ est une mesure (à 2π près) de l'angle de la rotation r.

Remarque 6. Lorsque l'on choisit $\theta \in [-\pi, \pi[$, il est alors uniquement déterminé, et l'on parle parfois de *mesure principale*.



Proposition 23.

Si r est la rotation plane d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ du plan, on a :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dém : Soit r une rotation plane

Par définition, il existe une base orthonormée Pour $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$M' = Mat_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique. Posons $M = Mat_{\mathcal{B}}(r)$

Pour $P = Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $M = PM'P^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\square$

Proposition 24 (Écriture complexe d'une rotation)**.**

Si r est la rotation plane d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, alors en identifiant les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à leurs affixes complexes $a + \mathbf{i}b$, r correspond à la transformation complexe :

$$\begin{array}{rccc} \rho_\theta : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\mathbf{i}\theta} z \end{array}$$

démonstration : Pour a, b réels, et $\theta \in \mathbb{R}$, on a, pour $z = a + \mathbf{i}b$:

$\rho_\theta(z) = e^{\mathbf{i}\theta} z = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin(\theta))(a + \mathbf{i}b) = (a\cos\theta - b\sin\theta) + \mathbf{i}(a\sin\theta + b\cos\theta)$, qui correspond au calcul matriciel :

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}$. $\square$

Remarque 7. On a $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta = \rho_{\theta+\theta'}$.

III.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Proposition 25.

Dans le plan euclidien, la composée de deux réflexions est une rotation plane.

démonstration : il s'agit d'une isométrie, de déterminant $(-1) \times (-1) = 1$, donc d'une rotation plane.$\square$

Théorème 26 (Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien)**.**

Les isométries du plan sont soit les rotations, soit les réflexions.

démonstration :

Si le déterminant vaut 1, on a une rotation d'angle θ.

Si le déterminant vaut -1, avec $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, on a :

$\chi_M = (X - \cos\theta)(X + \cos\theta) - \sin^2\theta = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

Il y a donc deux valeurs propres distinctes 1 et -1 de multiplicités respectives 1, et la matrice est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: on reconnaît la matrice d'une réflexion par rapport à la droite $F = \mathrm{Ker}(u - id_E)$.

□

Remarque 8. Dans le cas d'une réflexion, on peut déterminer explicitement F en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y & = & x \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y & = & y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos(\theta)-1)x - \sin(\theta)y & = & 0 \\ \sin(\theta)x + (\cos(\theta)-1)y & = & 0 \end{array} \right. \quad (S)$$

- Dans le cas $\theta = 0 \bmod 2\pi$, tout vecteur convient, et on reconnaît l'identité, ce qui est impossible pour le déterminant égal à -1.
- Dans le cas $\theta = \pi \bmod 2\pi$, $(S) \iff x = 0$, donc $v = (0;1)$ dirige F.
- Sinon, on a $\sin\theta \neq 0$ et $(S) \iff y = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}x$, donc $v = \left(1; \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ dirige F.

IV. Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

IV.1 Définition

Définition 12 (Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien).

Un endomorphisme $e \in \mathcal{L}(E)$ est dit **symétrique** si :

$$\forall x, y \in E, \ < u(x)|y >=< x|u(y) >$$

IV.2 Matrice dans une base orthonormée

Proposition 27.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

démonstration : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $C_1 \dots, C_n$ les colonnes de $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, et $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Si u est un endomorphisme symétrique, alors, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a : $< u(e_i)|e_j >=< e_i|u(e_j) >$, donc $(ME_i)^T E_j = (E_i)^T M E_j$, donc $(C_i)^T E_j = (E_i)^T C_j$, donc $m_{ji} = m_{ij}$, donc M est symétrique réelle.

- Si M est symétrique réelle, $X^T M Y = X^T M^T Y = (MX)^T Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc pour tous $x, y \in E$, $< u(x)|y >=< x|u(y) >$ □

variante longue : pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a : $m_{ji} = m_{ij}$ donc $(C_i)^T E_j = (E_i)^T C_j$, donc $(ME_i)^T E_j = (E_i)^T ME_j$, donc $< u(e_i)|e_j > = < e_i|u(e_j) >$.
Ainsi pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$, on a :
$< u(x)|y > \underset{bilin.}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < u(e_i)|e_j > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i|u(e_j) > \underset{bilin.}{=} < x|u(y) >$ *donc u est un endomorphisme symétrique.*

V. Réduction des endomorphismes symétriques

V.1 Valeurs propres

lemme 28. Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.Alors toute valeur propre de A est réelle.

démonstration :
Pour $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $X \neq 0$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $AX = \lambda X$:
On a en conjuguant $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est réelle.
Mais alors
$\lambda X^T \overline{X} = (AX)^T \overline{X} = X^T A^T \overline{X} = X^T A \overline{X} = X^T \overline{AX} = X^T \overline{\lambda X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$, donc

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

□

lemme 29. Soit u un endomorphisme symétrique de E euclidien. Alors toute valeur propre de u est réelle.

démonstration : Soit A la matrice de u dans la base canonique est symétrique réelle. □

V.2 Sous-espaces propres

lemme 30. Soit u un endomorphisme symétrique de E euclidien, et F un sous-espace stable de u.
Alors $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$.
Alors toute valeur propre de u est réelle.

démonstration :
• La stabilité de $F^\perp$ par u résulte du calcul, pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$,
$< u(y)|x > = < y|u(x) > = 0$ car $u(x) \in F$, donc $u(y) \in F^\perp$.

• Pour tous $x, y \in F^\perp$ $< u(x)|y > = < x|u(y) >$, donc $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$ □

V.3 Diagonalisation

Théorème 31 (Théorème spectral).

un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. (associés à des valeurs propres réelles)

Démonstration (non exigible) : par récurrence sur $n = \dim(E)$.

• Initialisation : le cas $n = 1$ est immédiat.

• Initialisation : Supposons la propriété vraie pour tout endomorphisme symétrique sur un espace euclidien de dimension n, pour $n \geq 1$ fixé.

Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$, u un endomorphisme symétrique de E, λ une valeur propre (réelle) de u, et v un vecteur propre associé.

En posant $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v)$, on sait que $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$. Comme $u_{|F^{\perp}}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $F^{\perp}$ de dimension n, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_{F^{\perp}}$ de $F^{\perp}$ formée de vecteurs propres de u.

Mais alors la famille $\mathcal{B} = (v, \mathcal{B}_{F^{\perp}})$ est une base de E, adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$, et formée de vecteurs propres de u. $\square$

Théorème 32 (théorème spectral, version matrices symétriques réelles).

Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que

$$P^T A P = D$$

démonstration : il s'agit de la formule de changement de base, pour P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise l'endomorphisme u canoniquement associé à A. $\square$

exemple 3. Attention, pour une matrice symétrique complexe, on ne sait rien !

$M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, $\chi_M = (X-1)(X+1) - 1 = X^2$, et M n'est pas semblable à 0_2

V.4 Complément

Si M est une matrice symétrique réelle, dont les valeurs propres sont toutes dans $]0, +\infty[$, alors $\varphi_M : (X, Y) \longmapsto X^T M Y$ définit un poduit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Programme PC :

Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classifier en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois.
Groupe orthogonal. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$. Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Groupe orthogonal d'ordre n. Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation d'un espace euclidien.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Écriture complexe d'une rotation.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.	Démonstration non exigible.
Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.	