

# Table des matières

<b>I. Espérance</b>	<b>2</b>
I.1 Espérance . . . . .	2
1.a) Définition . . . . .	2
1.b) Propriétés . . . . .	2
1.c) Linéarité, espérance d'une somme de variables aléatoires . . . . .	3
I.2 Variance . . . . .	3
2.a) Définition . . . . .	3
2.b) Premières propriétés . . . . .	4
<b>II. Couple de variables aléatoires discrètes, indépendance</b>	<b>5</b>
II.1 Couple . . . . .	5
II.2 Indépendance de deux variables . . . . .	5
<b>III. Espérance, variance et indépendance</b>	<b>6</b>
III.1 Espérance d'un produit de v.a.r. indépendantes . . . . .	6
III.2 Variance d'une somme finie de v.a.r. indépendantes . . . . .	6
<b>IV. Corrélacion et covariance</b>	<b>7</b>
IV.1 Variance d'une somme, covariance . . . . .	7
IV.2 Covariance, corrélation . . . . .	7
<b>V. Variables aléatoires à valeurs dans <math>\mathbb{N}</math></b>	<b>8</b>
V.1 Série génératrice . . . . .	8
V.2 Loi géométrique . . . . .	9
V.3 Loi de Poisson . . . . .	11
V.4 Loi Binomiale . . . . .	12
V.5 Fonction de répartition . . . . .	12

## Pré-requis

## Objectifs

# I. Espérance

## I.1 Espérance

### 1.a) Définition

**Définition 1.**

La variable aléatoire réelle discrète  $X$  à valeurs dans un ensemble dénombrable  $\{x_n; n \geq 0\}$  est dite d'espérance finie si la série  $\sum_{n \geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$  est **absolument convergente**; si tel est le cas, on

appelle espérance de  $X$ , noté  $\mathbb{E}(X)$ , le réel  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$

N.B. : On admet que la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$  ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

**exemple 1.** Si  $X \hookrightarrow b(p)$ , alors  $\mathbb{E}[X] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = \boxed{p}$ .

**exemple 2.** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$ , alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} k p^k (1-p)^{N-k} = \left[ x \times \frac{d}{dx} ((x + (1-p))^N) \right]_{x=p} = p \times N = \boxed{Np}$$

**exemple 3.** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ , alors par changement d'indice :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \lambda^{k-1} \lambda e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \boxed{\lambda}$$

**exemple 4.** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , alors par dérivation terme à terme sur  $] -1, 1[$  :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{d}{dx} (x^k) \right]_{x=1-p} = p \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) \right]_{x=1-p} = p \left[ \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \right]_{x=1-p} = \frac{p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

### 1.b) Propriétés

**Proposition 1.**

Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admet une espérance, alors  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$ .

dém : on découpe et on intervertit les sommes convergentes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^k \mathbf{P}(X = k) \right) \\ &\stackrel{\text{somme série positive}}{=} \sum_{1 \leq n \leq k} \mathbf{P}(X = k) \stackrel{\text{intersion}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n). \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 2 (Théorème du transfert :).**

si  $X$  est une variable aléatoire et  $f$  une application à valeurs réelles définie sur l'image  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  de  $X$ , alors  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X = x_n) f(x_n)$  converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) f(x_n).$$

*Démonstration hors programme*, idée : pour une fonction indicatrice  $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ , la formule est vraie. Puis toute fonction  $f$  continue sur un segment est limite uniforme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices...

### 1.c) Linéarité, espérance d'une somme de variables aléatoires

**Proposition 3 (Linéarité de l'espérance).**

Pour tous  $X, Y$  variables aléatoires et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

*Démonstration non exigible*. idée : immédiat pour des variables à espaces de valeurs finis, se généralise aux v.a. discrètes quelconques.

**Proposition 4 (Positivité de l'espérance).**

Pour  $X$  variables aléatoires à valeurs positives et qui admet une espérance  $\mathbb{E}[X] \geq 0$ .

*Démonstration* séries num !

## I.2 Variance

### 2.a) Définition

**Proposition 5.**

Soit  $X$  v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est elle-même d'espérance finie.

i.e. : Si  $\mathbb{E}[X^2]$  existe, alors  $\mathbb{E}[X]$  existe.

*idée Démonstration :*

$$\sum_{n=0}^N x_n p_n = \sum_{n=0}^N x_n \sqrt{p_n} \times \sqrt{p_n} \stackrel{C.-S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n=0}^N x_n^2 p_n} \sqrt{\sum_{n=0}^N p_n} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 p_n} \quad \square$$

marche encore si  $X$  discrète quelconque...

**Proposition 6.**

Soit  $X$  v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si  $\mathbb{E}[X^2]$  existe, alors  $m = \mathbb{E}[X]$  existe et  $\mathbb{E}[(X - m)^2]$ .  
De plus  $\mathbb{E}[(X - m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

*Démonstration :*  $(X - m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$ .

$\mathbb{E}[m^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} m^2 p_n = m^2$  existe par transfert via  $f : x \mapsto m^2 x^0$  ou via v.a.r. constante.

Donc par linéarité  $\mathbb{E}[(X - m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[m^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2$ .  $\square$  (formule de Koenig).

**Définition 2.**

Si  $X^2$  est d'espérance finie, la **variance** de  $X$  est le réel  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

**2.b) Premières propriétés****Proposition 7.**

Soit  $X$  v.a. à valeurs discrète admettant une variance et une espérance. Alors  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

*idée Démonstration :* linéarité

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \quad \square$$

**Proposition 8.**

Pour  $a$  et  $b$  réels et  $X$  une variable aléatoire réelle, on a  $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$

*démonstration :* Calcul direct :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a \mathbb{E}(X) + b, \text{ donc } \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) = \mathbb{E}((a(X - \mathbb{E}(X)))^2) = a^2 \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2). \quad \square$$

**exemple 5.** Pour  $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$  de loi  $\mathcal{B}(N, p)$ , somme de variables de loi  $b(p)$  indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^N \mathbb{V}(X_k) = Np(1 - p)$$

**exemple 6.** Pour  $S_N$  de loi  $\mathcal{B}(N, p)$ ,  $\mathbb{V}\left(\frac{1}{N}S_N\right) = \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(S_N) = \frac{p(1 - p)}{N}$

## II. Couple de variables aléatoires discrètes, indépendance

### II.1 Couple

**Définition 3** (Couple de variables aléatoires discrètes).

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , l'application **couple** notée  $(X, Y)$  définie par  $(X, Y) : \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$  est une variable aléatoire sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

**Définition 4.**

Etant données  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire  $(X, Y)$ , définie par :

$$\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Les lois  $\mathbf{P}_X$  de  $X$  et  $\mathbf{P}_Y$  de  $Y$  sont appelées les **lois marginales** de  $(X, Y)$ .

**exemple 7.** En pratique, on fait un tableau à double entrée donnant les  $\mathbf{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$  :

$Y \setminus X$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\mathbb{P}_X$
$y_0$	1/16	2/16	3/16	6/16
$y_1$	1/16	7/16	2/16	10/16
$\mathbb{P}_Y$	2/16	9/16	5/16	

*Remarque 1.* Attention : la données des marginales ne donne pas la loi du couple !

contre-exemple :  $(X, Y)$  suit la loi uniforme sur  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

et  $(X', Y')$  donnée par  $\mathbf{P}_{(X', Y')}(0, 0) = 1/8$ ,  $\mathbf{P}_{(X', Y')}(1, 0) = 3/8$ ,  $\mathbf{P}_{(X', Y')}(0, 1) = 3/8$ ,  $\mathbf{P}_{(X', Y')}(1, 1) = 1/8$  ont les mêmes marginales, mais ne sont pas égales!!!

En revanche,  $\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x)$  : la loi du couple donne les marginales.

**Définition 5.**

Soit  $x \in X(\Omega)$  tel que  $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$ .

On appelle **loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = x\}$**  la loi de probabilité définie pour les  $y \in Y(\Omega)$  par  $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$ .

### II.2 Indépendance de deux variables

**Définition 6.**

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sont dites **indépendantes** si, pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,

$$\mathbf{P}(\{X = x, Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Remarque 2. on note  $\{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$

### Proposition 9.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors, pour toute partie  $A \subset X(\Omega)$  et toute partie  $B \subset Y(\Omega)$ , on a

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

*Démonstration hors programme*

### Proposition 10.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ , les variables  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

### Proposition 11.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors, pour toute partie  $A \subset X(\Omega)$  et toute partie  $B \subset Y(\Omega)$ , on a

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

*Démonstration hors programme*

## III. Espérance, variance et indépendance

### III.1 Espérance d'un produit de v.a.r. indépendantes

#### Proposition 12.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que  $XY$  admet une espérance, alors  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$ .

*Démonstration hors programme*

idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple  $(X, Y)$ .

Remarque : réciproque fautive pour  $X = Y$  de loi  $b(p)$  par exemple

### III.2 Variance d'une somme finie de v.a.r. indépendantes

#### Proposition 13.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ .

*Démonstration :*

$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y)))^2 = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$  et indépendance.

## IV. Corrélation et covariance

### IV.1 Variance d'une somme, covariance

#### Proposition 14.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors  
$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

*Démonstration :*  $((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))^2 = (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) + (Y - \mathbb{E}(Y))^2$

### IV.2 Covariance, corrélation

#### Définition 7 (Covariance).

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

En cas d'indépendance, la covariance est nulle.

#### Proposition 15.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors  
$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

*Démonstration*

#### Définition 8 (coefficient de corrélation).

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y)}}$$

*Remarque 3.* En cas d'indépendance, la corrélation vaut 0.

En cas de relation  $Y = aX + b$ , la corrélation vaut 1 ou  $-1$ .

#### Définition 9.

Écart type  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ .

**Proposition 16** (Cauchy-Schwarz).

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles.

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathbb{V}(X) \mathbb{V}(Y)}$$

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

*démonstration* : ( Inégalité de Cauchy-Schwarz)  $\mathbb{V}(tX + Y) = t^2\mathbb{V}(X) + 2t\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$ , trinôme dont le discriminant ne change pas de signe.

Dans le cas de variables à valeurs dans un ensemble fini, il y a égalité ssi  $X - \mathbb{E}(X)$  et  $Y - \mathbb{E}(Y)$  sont colinéaires, i.e. ssi  $\exists a; a(X - \mathbb{E}(X)) = Y - \mathbb{E}(Y)$  ssi  $\exists a, b; aX + b = Y$   $\square$

*Remarque 4.* Régression linéaire : si  $|\rho| = 1$ , alors égalité dans Cauchy-Schwarz :  $(X - \mathbb{E}(X))$  et  $(Y - \mathbb{E}(Y))$  sont colinéaires, donc il existe  $a, b$  tels que  $Y = aX + b$ .

Sinon, on pose  $\Xi = (y_1 \dots y_N)$  et  $\Gamma = (y_1 \dots y_N)$

on cherche  $\hat{a}, \hat{b}$  tels que  $\left\| \Gamma - \hat{a}\Xi + \hat{b}(1 \dots 1) \right\|_2^2 = \left\| M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \Gamma \right\|_2^2$  soit minimale, avec  $M = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

OK pour  $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$  le projeté de  $\Gamma$  sur  $\text{Im}(M)$ .

## V. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

### V.1 Série génératrice

**Définition 10** ( Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ).

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On appelle (somme de la ) série génératrice la fonction  $G_X$  définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

*Remarque 5.* La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa série génératrice  $G_X$ .

en effet, le r.c.v. est  $> 0$  donc par unicité du DSE,  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}[X = n] = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

**Proposition 17.**

La variable aléatoire  $X$  admet une espérance  $\mathbb{E}(X)$  si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 et, si tel est le cas,  $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ .



Démonstration non exigible.

**Proposition 18.**

La variable aléatoire  $X$  admet une variance si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas,  $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$

Démonstration non exigible.

Remarque 6. On obtient les expressions de  $\mathbb{V}(X)$  en fonction de  $G_X'(1)$  et de  $G_X''(1)$  en cas d'existence :

$G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$ ,  $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$ , d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_k (k - \mathbb{E}[X])^2 \mathbf{P}(\{X = k\})$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

**Proposition 19.**

Si  $X$  admet une variance, alors  $\mathbb{V}[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

**Proposition 20.**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. **indépendantes**, alors  $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

dém : par indépendance de  $t^X$  et  $t^Y$ .

## V.2 Loi géométrique

**Définition 11.**

On appelle loi géométrique de paramètre réel  $p$  la loi, notée  $\mathcal{G}eom(p)$ , définie pour  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

C'est la loi du premier succès dans une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est  $p$

**Proposition 21.**

Pour  $X$  de loi  $\mathcal{G}(p)$ , on a :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$$

démonstration : La série  $\sum_k k^2 p(1-p)^{k-1}$  converge, car son terme général est un  $o(k^{-2})$ .

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^k = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)t}{1 - (1-p)t} = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$$

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1 - (1-p)t)^2}$$

$$G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p)t)^3}$$

Donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \quad \square$$

**Proposition 22** (Caractérisation comme loi sans mémoire).

Une loi de probabilité  $\mathbf{P}$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est une loi géométrique si et seulement si

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}_{\{X > n\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbf{P}(X > k).$$

démonstration :

•

$$\mathbf{P}(X > m) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1} p = p \sum_{j=m+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1} = (1-p)^m$$

$$\text{Donc } \mathbf{P}_{\{X > n\}}(X > n+k) = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbf{P}(X > k).$$

donc la loi  $\mathcal{G}(p)$  est sans mémoire.

• réciproquement

$$\mathbf{P}_{\{X > k\}}(X = n+k) = \mathbf{P}_{\{X > k\}}(X > n+k-1) - \mathbf{P}_{\{X > k\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n-1) - \mathbf{P}(X > n) = \mathbf{P}(X = n)$$

En particulier pour  $k = 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a donc

$$\mathbf{P}_{\{X > 1\}}(X = n+1) = \mathbf{P}(X = n), \text{ donc en posant } p = \mathbb{P}[X = 1], \text{ on a } \mathbf{P}(X = n+1) = (1-p)\mathbf{P}(X = n).$$

donc toute loi sur  $\mathbb{N}^*$  et sans mémoire est une loi  $\mathcal{G}(p)$ . pour  $p = \mathbb{P}[X = 1]$

□

## V.3 Loi de Poisson

### Définition 12.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel  $\lambda$  la loi, notée  $\mathcal{P}(\lambda)$  définie pour  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

### Proposition 23.

Pour  $X$  de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , on a :

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\mathbb{V}[X] = \lambda$$

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

démonstration :

La série  $\sum_k k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  converge, car son terme général est un  $o(k^{-2})$ .

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

$$G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$$

$$G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$$

Donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda$$

$$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda \quad \square$$

### Proposition 24 (additivité de poissons indépendantes).

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$  sont deux v.a. indépendantes, alors  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

démonstration :  $\mathbf{P}(X + Y = k)$  se découpe et binôme de Newton.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^k \mathbf{P}((X, Y) = (j, k-j)) = \sum_{j=0}^k \mathbf{P}(X = j) \mathbf{P}(Y = k-j) \\ &= \sum_{j=0}^k e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{j=0}^k e^{-(\lambda+\mu)} \binom{k}{j} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{k!} = \sum_{j=0}^k e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

## V.4 Loi Binomiale

### Définition 13.

On appelle loi Binomiale de paramètres  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$  réel, la loi notée  $\mathcal{B}(N, p)$  définie pour  $S \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$  par :

$$\mathbf{P}(\{S = k\}) = \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} p^k, \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

### Proposition 25.

Pour  $S$  de loi  $\mathcal{B}(N, p)$ , on a :

$$\mathbb{E}[S] = Np$$

$$\mathbb{V}[S] = Np(1-p)$$

$$G_S(s) = (1-p+ps)^N$$

démonstration :

$$\text{On calcule la somme finie } G_S(t) = \sum_{k=0}^N t^k \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} p^k = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (pt)^k = (1-p+pt)^N$$

$$G'_S(t) = Np(1-p+pt)^{N-1}$$

$$G''_S(t) = Np((N-1)p)(1-p+pt)^{N-2} \text{ (pour } N \geq 2)$$

Donc

$$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = Np$$

$$\mathbb{V}[S] = G''_S(1) + G'_S(1) - (G'_S(1))^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Np(1-p) \quad \square$$

## V.5 Fonction de répartition

### Définition 14 (Fonction de répartition).

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire réelle discrète  $X$  la fonction :

$$F_X : t \mapsto \mathbf{P}(\{X \leq t\})$$

### Proposition 26.

$$F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0,$$

démonstration :

Dans le cas où  $X$  est à valeurs dans l'ensemble  $X(\Omega) = \{(x_n)_n\}$  :, avec  $(|x_k|)$  triée par ordre croissant de modules :

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $n_0$  tel que  $\mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} < \varepsilon$ , car la série  $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$  est positive

convergente, de somme 1

Mais alors pour  $t < -|x_{n_0}|$ , on a  $0 \leq \mathbf{P}(X \leq t) \leq \mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) \leq \varepsilon$ .

Donc  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$ .

De même

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $n_0$  tel que  $\mathbf{P}(X > |x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} < \varepsilon$ , car la série  $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$  est positive

convergente, de somme 1

Mais alors pour  $t \geq |x_{n_0}|$ , on a  $0 \leq \mathbf{P}(X > t) \leq \mathbf{P}(X > |x_{n_0}|) \leq \varepsilon$ .

Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X > t) = 0$  et par passage à l'évènement contraire,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 1 - 0 = 1$ .  $\square$

Programme PC :

## B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;
- fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;
- exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;
- introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités

Une variable aléatoire discrète  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une application définie sur  $\Omega$  dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de  $X(\Omega)$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

Notations  $(X \in U)$ ,  $\{X \in U\}$ .

Loi d'une variable aléatoire discrète.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Croissance, limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

Si  $X$  prend ses valeurs dans  $\{x_n; n \geq 0\}$ , les  $x_n$  étant distincts, et si  $(p_n)_{n \geq 0}$  est une suite de réels positifs

vérifiant  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ , alors il existe une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que  $P(X = x_n) = p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $U \subset X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(U)$  est un événement.

$F_X(x) = P(X \leq x)$ . L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.

Démonstration hors programme.

#### b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète  $X$  à valeurs dans un ensemble dénombrable  $\{x_n; n \geq 0\}$  est dite d'espérance finie si la série  $\sum x_n P(X = x_n)$  est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de

$X$ , noté  $\mathbb{E}(X)$ , le réel  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ .

Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ .

On admet que la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$  ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

$\Leftrightarrow$  PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.

CONTENUS

Théorème du transfert : si  $X$  est une variable aléatoire et  $f$  une application à valeurs réelles définie sur l'image  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  de  $X$ , alors  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la série  $\sum P(X = x_n) f(x_n)$  converge absolument. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) f(x_n).$$

Linéarité de l'espérance.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

Si la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est elle-même d'espérance finie.

Si  $X^2$  est d'espérance finie, la variance de  $X$  est le réel  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

Écart type  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ .

Pour  $a$  et  $b$  réels et  $X$  une variable aléatoire réelle, égalité  $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$ .

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.

Covariance, coefficient de corrélation.

Encadrement  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .

**c) Variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$**

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

La variable aléatoire  $X$  admet une espérance  $\mathbb{E}(X)$  si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 et, si tel est le cas,  $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ .

La variable aléatoire  $X$  admet une variance si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Démonstration hors programme.

Démonstration non exigible.

Démonstration hors programme.

Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.

Notations :  $\text{Cov}(X, Y)$  et  $\rho(X, Y)$ .

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa série génératrice  $G_X$ .

Démonstration non exigible.

Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de  $\mathbb{V}(X)$  en fonction de  $G'_X(1)$  et de  $G''_X(1)$  en cas d'existence.

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

**d) Lois usuelles**

Pour  $p$  dans  $]0, 1[$ , loi géométrique de paramètre  $p$  : la variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$  si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Série génératrice, espérance et variance.  
Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

Loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.

Notation  $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

Notation  $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

$\Leftrightarrow$  PC : compteur Geiger.

**e) Résultats asymptotiques**

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout  $n$ ,  $X_n \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ , alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Loi faible des grands nombres : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $m = \mathbb{E}(X_1)$  et  $\sigma = \sigma(X_1)$ , on a pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

$\Leftrightarrow$  I : simulation de cette approximation.

La notion de convergence en loi est hors programme.

Estimation : pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

$\Leftrightarrow$  I : simulation d'une suite de tirages.