Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Espérance

I.1 Espérance

1.a) Définition

Définition 1.

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum_{n\geq 0} x_n\, \mathbf{P}(X = x_n)$ est **absolument convergente** ; si tel est le cas, on appelle **espérance** de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, \mathbf{P}(X = x_n)}$

N.B. : On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, \mathbf{P}(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

exemple 1. Si $X \hookrightarrow b(p)$, alors $\mathbb{E}[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = \boxed{p}$.

exemple 2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} kp^k(1-p)^{N-k} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} kp^k(1-p)^{N-k} = \left[x \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+(1-p))^N\right)\right]_{x=p} = p \times N = \boxed{Np}.$$

exemple 3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors par changement d'indice :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k-1}\lambda e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{\lambda}.$$

exemple 4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors par dérivation terme à terme sur $]-1,1[$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p} = \frac{p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}.$$

1.b) Propriétés

Proposition 1.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$.

dém : on découpe et on intervertit les sommes convergentes

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}(X = k)\right)$$

$$\underset{\text{somme série positive}}{=} \sum_{1\leq n\leq k} \mathbf{P}(X = k) \underset{\textit{interversion}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n). \square$$

Théorème 2 (Théorème du transfert :).

si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n).$$

Démonstration hors programme, idée : pour une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la formule est vraie. Puis toute fonction f continue sur un segment est limite uniforme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices...

1.c) Linéarité, espérance d'une somme de variables aléatoires

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance).

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration non exigible.

idée : immédiat pour des variables à espaces de valeurs finis, se généralise aux v.a. discrètes quelconques.

en notant $\{(\omega_k)_{1\leq k\leq K}\}$ un système complet d'évènements tel que $p_k = \mathbf{P}_{(X,Y)}(x_k, y_k) = \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_k, y_k)\})$ avec $X(\Omega) = \{x_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $N \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints) et $Y(\Omega) = \{y_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $M \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints),

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda x_k + y_k)p_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda x_k p_k + \sum_{k=1}^{N} y_k p_k$$

idée cas général : On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i, y_j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire couple (X, Y), avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in \mathbb{N}\}$, et on note $p_n = \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme X est d'espérance finie, la série $\sum\limits_{i} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})$ converge absolument, et sa somme vaut, en utilisant les lois marginales, et le théorème de transfert pour $f : (x, y) \longmapsto x$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f((x_i, y_j))\mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\})$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$$

De même pour $g : (x, y) \longmapsto y$: $\mathbb{E}[Y] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda f(C_n) + g(C_n)| \leq |\lambda|\ |f(C_n)| + |g(C_n)|$,

la série $\sum \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda f(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$$

Donc d'après le théorème de transfert $\lambda X + Y = \lambda f((X,Y)) + g((X,Y))$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \square$$

I.2 Variance

2.a) Définition

Proposition 4.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
i.e. : Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe.

idée Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{N} x_n p_n = \sum_{n=0}^{N} x_n \sqrt{p_n} \times \sqrt{p_n} \underset{C.-S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} x_n^2 \sqrt{p_n}^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} \sqrt{p_n}^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 p_n} \square$$

marche encore si X discrète quelconque...

Proposition 5.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $m = \mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{E}[(X-m)^2]$.
De plus $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Démonstration : $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

$\mathbb{E}[m^2] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} m^2 p_n = m^2$ existe par transfert via $f : x \longmapsto m^2 x^0$ ou via v.a.r. constante.

DOnc par linéarité $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[m^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2$. $\square$ (formule de Koenig).

Définition 2.

Si X^2 est d'espérance finie, la **variance** de X est le réel $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$.

2.b) Premières propriétés

Proposition 6.

Soit X v.a. à valeurs discrète admettant une variance et une espérance. Alors $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$

idée Démonstration : linéarité

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \quad \square$$

Proposition 7.

Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, on a $\boxed{\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)}$

démonstration : Calcul direct :
$\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X)+b$, donc $\mathbb{E}((aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2) = \mathbb{E}((a(X-\mathbb{E}(X)))^2) = a^2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$. □

exemple 5. Pour $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ de loi $\mathcal{B}(N,p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(X_k) = Np(1-p)$$

exemple 6. Pour S_N de loi $\mathcal{B}(N,p)$, $\mathbb{V}\left(\frac{1}{N}S_N\right) = \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(S_N) = \frac{p(1-p)}{N}$

I.3 Indépendance de deux variables

Définition 3.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(\{X=x, Y=y\}) = \mathbf{P}(X=x)\times\mathbf{P}(Y=y).$$

Remarque 1. on note $\{X=x,Y=y\} = \{X=x\}\cap\{Y=y\}$

Proposition 8.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A\subset X(\Omega)$ et toute partie $B\subset Y(\Omega)$, on a

$$\mathbf{P}(X\in A,\ Y\in B) = \mathbf{P}(X\in A)\times\mathbf{P}(Y\in B)$$

Démonstration hors programme

Proposition 9.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

I.4 Espérance d'un produit de v.a.r. indépendantes

Proposition 10.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X, Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

I.5 Variance d'une somme finie de v.a.r. indépendantes

Proposition 11.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration :
$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X)) + (Y-\mathbb{E}(Y)))^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$ et indépendance.

II. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

II.1 Série génératrice

Définition 4 (Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$)**.**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle (somme de la) série génératrice la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\ t^n$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Remarque 2. La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.

en effet, le r.c.v. est >0 donc par unicité du DSE, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}[X=n] = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 12.

La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Démonstration non exigible.

Proposition 13.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
Si tel est le cas, $\boxed{G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)}$

Démonstration non exigible.

Remarque 3. On obtient les expressions de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence :
$G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_k (k - \mathbb{E}[X])^2 \ \mathbf{P}(\{X = k\})$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$$

Proposition 14.

Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}[X] = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

Proposition 15.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X + G_Y$

dém : par indépendance de t^X et t^Y.

II.2 Loi géométrique

Définition 5.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}eom(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1} p$$

C'est la loi du premier succès dans une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

Proposition 16.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$
$\mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$
$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

démonstration : La série $\sum_k k^2 p(1-p)^{k-1}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \; p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^k = \dfrac{p}{1-p}\,\dfrac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$
$G_X'(t) = \dfrac{p}{(1-(1-p)t)^2}$
$G_X''(t) = \dfrac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$
Donc
$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \dfrac{1}{p}$
$\mathbb{V}[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2 = \dfrac{2(1-p)}{p} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$ $\square$

Proposition 17 (Caractérisation comme loi sans mémoire)**.**

Une loi de probabilité $\mathbf{P}$ d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est une loi géométrique si et seulement si

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\; \mathbf{P}_{\{X>n\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbf{P}(X > k).$$

démonstration :

•

$\mathbf{P}(X > m) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1}p = p\sum_{j=m+1}^{+\infty}(1-p)^{j-1} = (1-p)^m$

Donc $\mathbf{P}_{\{X>n\}}(X > n+k) = \dfrac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbf{P}(X > k)$.
donc la loi $\mathcal{G}(p)$ est sans mémoire.
• réciproquement
$\mathbf{P}_{\{X>k\}}(X = n+k) = \mathbf{P}_{\{X>k\}}(X > n+k-1) - \mathbf{P}_{\{X>k\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n-1) - \mathbf{P}(X > n) = \mathbf{P}(X = n)$
En particulier pour $k = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc
$\mathbf{P}_{\{X>1\}}(X = n+1) = \mathbf{P}(X = n)$, donc en posant $p = \mathbb{P}[X = 1]$, on a $\mathbf{P}(X = n+1) = (1-p)\mathbf{P}(X = n)$.
donc toute loi sur $\mathbb{N}^*$ et sans mémoire est une loi $\mathcal{G}(p)$. pour $p = \mathbb{P}[X = 1]$
$\square$

II.3 Loi de Poisson

Définition 6.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Proposition 18.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \lambda$
$\mathbb{V}[X] = \lambda$
$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

démonstration :
La série $\sum_k k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

$G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$
$G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$
Donc
$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda$
$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda \quad \square$

Proposition 19 (additivité de poissons indépendantes)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

démonstration : $\mathbf{P}(X + Y = k)$ se découpe et binôme de Newton.

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}((X, Y) = (j, k - j)) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}(X = j)\mathbf{P}(Y = k - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \binom{k}{j} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{k!} = \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$$

II.4 Loi Binomiale

Définition 7.

On appelle loi Binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ réel, la loi notée $\boxed{\mathcal{B}(N,p)}$ définie pour $S \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$ par :

$$\mathbf{P}(\{S=k\}) = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k, \text{ pour tout } k \in [\![0,N]\!]$$

Proposition 20.

Pour S de loi $\mathcal{B}(N,p)$, on a :
$\mathbb{E}[S] = Np$
$\mathbb{V}[S] = Np(1-p)$
$G_S(s) = (1-p+ps)^N$

démonstration :

On calcule la somme finie $G_S(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}(pt)^k = (1-p+pt)^N$
$G'_S(t) = Np(1-p+pt)^{N-1}$
$G''_S(t) = Np((N-1)p)(1-p+pt)^{N-2}$ (pour $N \geq 2$)
Donc
$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = Np$
$\mathbb{V}[S] = G''_S(1) + G'_S(1) - (G'_S(1))^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^1 = Np(1-p)$ □

II.5 Fonction de répartition

Définition 8 (Fonction de répartition)**.**

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire réelle discrète X la fonction :

$$F_X : t \longmapsto \mathbf{P}(\{X \leq t\})$$

Proposition 21.

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$,

démonstration :

Dans le cas où X est à valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{(x_n)_n\}$:, avec $(|x_k|)$ triée par par ordre croissant de modules :

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe n_0 tel que $\mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} < \varepsilon$, car la série $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est positive convergente, de somme 1

Mais alors pour $t < -|x_{n_0}|$, on a $0 \leq \mathbf{P}(X \leq t) \leq \mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{t \to -\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$, $\lim_{t \to -\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$.

De même

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe n_0 tel que $\mathbf{P}(X > |x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} < \varepsilon$, car la série $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est positive convergente, de somme 1

Mais alors pour $t \geq |x_{n_0}|$, on a $0 \leq \mathbf{P}(X > t) \leq \mathbf{P}(X \leq n_0) \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{P}(X > t) = 0$ et par passage à l'évènement contraire, $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 1 - 0 = 1$. $\square$

Programme PC :

B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.	
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{ x_n \ ; \ n \geqslant 0 \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.
b) Espérance et variance	
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n \,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\ f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	Démonstration hors programme.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.	
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.	
Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Contenus	Capacités & Commentaires
Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.

Contenus	Capacités & Commentaires
Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance. Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X>n+k \mid X>n)=P(X>k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.

e) Résultats asymptotiques

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n=\lambda$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. $\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m=\mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert\frac{1}{n}S_n-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert\frac{1}{n}S_n-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ $\leftrightarrows$ I : simulation d'une suite de tirages.