Table des matières

Pré-requis

Objectifs

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

I. Elements propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

I.1 Rappel : sous-espaces stables

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. On représente matriciellement les vecteurs $\overrightarrow{v}$ de E à l'aide de vecteurs colonnes $V\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})=mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v})$.

Définition 1 (sev stable).

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est $\boxed{\text{stable par } u}$ si : $\boxed{u(F)\subset F}$

Proposition 1.

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

démonstration : Pour $x\in\mathrm{Ker}(u)$, on a $u(u(x))\underset{x\in\mathrm{Ker}\,u}{=}u(0_E)=0_E$, donc $u(x)\in\mathrm{Ker}(u)$, ainsi $u\left(\mathrm{Ker}(u)\right)\subset\mathrm{Ker}(u)$.

Pour $y\in\mathrm{Im}(u)$, soit $x\in E$ tel que $u(x)=y$ un antécédant de y par u.

$u(y)=u(u(x))$, donc $u(x)$ est un antécédant de $u(y)$ par u, donc $u(y)\in\mathrm{Im}(u)$, ainsi $u\left(\mathrm{Im}(u)\right)\subset\mathrm{Im}(u)$. $\square$

I.2 Droites stables

Définition 2 (droite stable).

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Un droite vectorielle $D=\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})=\{\alpha\overrightarrow{v};\ \alpha\in\mathbb{K}\}$ dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ est dite stable par u si : $u(D)\subset D$

Proposition 2.

Soient $u\in\mathcal{L}(E)$, $\overrightarrow{v}\in E$ un vecteur NON NUL, dirigeant la droite $D=\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$.
Alors D est stable par u si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{K};\ u(\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{v}$.

démonstration :

I.3 Valeurs propres, sous-espaces propres

Définition 3 (vecteur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est dit **vecteur propre** de u si

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; \quad u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que le vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est associé à la valeur (propre) λ.

Remarque 1. Si $\overrightarrow{v} \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ associé à la valeur $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, par linéarité, tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v}$ et non nul est aussi vecteur propre de u associé à λ.

Proposition 3.

Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ NON NUL, on a l'équivalence entre :

i) $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$

ii) la droite $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$ est stable par u.

Définition 4 (valeur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ **NON NUL** tel que :

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{v} & \neq & \overrightarrow{0} \\ u(\overrightarrow{v}) & = & \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ (NON NUL), on dit que la valeur propre λ est associé au vecteur (propre) $\overrightarrow{v}$.

Remarque 2. Un vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est par définition **NON NUL** ! (sinon, tout scalaire conviendrait...)

Remarque 3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overrightarrow{v} \in E$. On a :

$$u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} \iff (u - \lambda \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_E} \iff \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$$

exemple 1. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 4.

λ est valeur propre de u ssi $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible

λ est valeur propre de u ssi $\boxed{\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0}$

démonstration : $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \supsetneq \{\overrightarrow{0_E}\} \iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non injective $\iff \lambda \mathrm{id}_E - u$ non bijective $\iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 5 (spectre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre** de u dans $\mathbb{K}$ l'ensemble noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists \overrightarrow{v} \in E \setminus \{\overrightarrow{0_E}\},\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}\right\}}$$

il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de u appartenant à $\mathbb{K}$.

Définition 6 (sous-espace propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ une valeur propre de u.
On définit le **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ, noté $E_{u,\lambda}$ ou E_λ par :

$$\boxed{E_{u,\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) = \{\overrightarrow{v} \in E;\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}\}}$$

lemme 5. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $E_{u,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant au moins une droite stable engendrée par un vecteur propre $\overrightarrow{v}$ (non nul!!!) associé à λ. En particulier,* $\boxed{\dim E_{u,\lambda} \geq 1}$.

Remarque 4. Ces définitions s'étendent aux matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, via l'endomorphisme u canoniquement associé.

Définition 7 (valeur propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **NON NUL** tel que : (1) $\left\{\begin{array}{ccc} V & \neq & 0_{n,1} \\ AV & = & \lambda V \end{array}\right.$

Définition 8 (vecteur (colonne) propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Un vecteur $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit **vecteur propre** de A si

$$\left\{\begin{array}{r} V \neq 0_{n,1} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K};\quad AV = \lambda V \end{array}\right.$$

Définition 9 (sous-espace propre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. Le **sous-espace-propre** associé est :
$E_{\lambda,A} = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 10 (spectre).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de A est : $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists V \in E;\ V \neq 0_{n,1}, \text{et } AV = \lambda V\}}$.

I.4 Polynôme caractéristique

4.a) Polynôme caractéristique d'une matrice

Remarque 5. Pour $A \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \supsetneq \{0_{n,1}\} \iff \lambda I_n - A$ non inject. $\iff \lambda I_n - A \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0_{\mathbb{K}}$

lemme 6. *Pour $C_1, \dots C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $E_1, \dots E_n$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$, on a :* $\det(xI_n - [C_1, \dots, C_n]) = \det([xE_1 - C_1, \dots, xE_n - C_n])$
$= x^n - \mathrm{Tr}([C_1, \dots, C_n])\ x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det([C_1, \dots, C_n])\ x^0$

Définition 11.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale de degré n en x et unitaire. On la note χ_A, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Définition 12 (multiplicité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.
On appelle $\boxed{\text{multiplicité de la valeur propre } \lambda}$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_A de A.
(i.e. m_λ est la puissance de $X - \lambda$ dans χ_A)

Proposition 7.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\boxed{\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n}$ et $\boxed{\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}}$

démonstration : L'ensemble des racines complexes deux à deux distinctes de χ_A est $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Comme le terme dominant de χ_A est X^n, la définition des $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$ assure le résultat. $\square$

Proposition 8.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\chi_A = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ son polynôme caractéristique scindé, avec $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i}\lambda_i}$

démonstration : $\det(0I_n - A) = (-1)^n \det(A) = \chi_A(0) = \prod(-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}} = (-1)^n \prod \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$,

donc $\det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}$

$\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{m_{\lambda_i}}(0 - \lambda_i)) = \sum_{i=1}^{s} -m_{\lambda_i}\lambda_i = \chi_A^{(n-1)}(0) = -\operatorname{tr}(A)$

donc $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i}\lambda_i$. $\square$

Proposition 9.

Deux matrices semblables sur $\mathbb{K}$ ont même polynôme caractéristique.

démonstration : $\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det(P(xI_n - N)P^{-1}) = \chi_N(x)$, si $N = PMP^{-1}$. $\square$.

4.b) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $x \mapsto \det(x\,\mathrm{id}_E - u)$ est polynômiale de degré n en x. On la note χ_u, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Remarque 6. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \iff \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{id}_E - u) \supsetneq \{\overrightarrow{0_E}\} \iff \lambda\mathrm{id}_E - u$ non injective $\iff \lambda\mathrm{id}_E - u$ non bijective $\iff \det(\lambda\mathrm{id}_E - u) = 0_{\mathbb{K}} \iff \chi_u(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 14 (multiplicité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$), et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (resp. de A).
On appelle $\boxed{\text{multiplicité de la valeur propre } \lambda}$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractérisique χ_u de u (resp. χ_A de A).
(i.e. m_λ est la puissance de $X - \lambda$ dans χ_u)

Proposition 10.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n. Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$. Alors $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n}$ et $\boxed{\displaystyle\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}}$

démonstration : L'ensemble des racines deux à deux distinctes de χ_u est $Sp_{\mathbb{C}}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Comme le terme dominant de χ_u est X^n, la définition des $(m_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq s}$ assure le résultat. □

Proposition 11.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n et $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ son polynôme caractéristique scindé, avec $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\boxed{\det(u) = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \lambda_i}$

démonstration : u à le même polynôme caractéristique (respectivement trace, respectivement déterminant) que A, sa matrice représentative dans une base, d'où le résultat.

Remarque 7. Pour une matrice ou un endomorphisme en dimension finie, l'<u>inversibilité</u> est équivalente au fait que <u>0 n'est pas valeur propre</u>, en utilisant le déterminant, par exemple.

II. Diagonalisation

II.1 Diagonalisabilité

Définition 15 (diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u.

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$.

Alors $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix} = D$ est une matrice diagonale. En outre, en notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

$$\boxed{PDP^{-1} = A}$$

démonstration : par définition des écritures matricielles de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$, comme $u(v_i) = \delta_i v_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$, on a bien la forme proposée pour D. On conclut avec la formule de changement de base vue en PCSI. □

Définition 16 (diagonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si l'endomorphisme u canoniquement associé est diagonalisable.

Proposition 13.

Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

démonstration : pour l'endomorphisme canoniquement associé, la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'une base de vecteurs propres, donc à une écriture matricielle diagonale relativement à une telle base de vecteurs propres.

II.2 Critères de diagonalisabilité

2.a) Espaces propres en somme directe

lemme 14. *Toute famille de vecteurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

démonstration : on montre le résultat par récurrence sur le nombre $k \geq 1$ de vecteurs propres considérés.

• l'initialisation pour $k = 1$ est immédiate.

• Supposons le résultat vrai pour toute famille d'au plus $k-1$ vecteurs propres associés à es valeurs propres distinctes 2 à 2, pour un $k \geq 2$ fixé.

Soient $v_1, \dots v_k$ des vecteurs propres de u associés aux valeurs propres distinctes deux à deux on a : $\forall i \in [\![1, k]\!],\ u(v_i) = \lambda_i v_i$.

Pour des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0_E \quad (1)$.

Supposons qu'il existe $j \in [\![1, k]\!]$ tel que $\alpha_j \neq 0$. Alors par linéarité de u, on obtient :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = u(0_E) = 0_E$, donc $\displaystyle\lambda_j \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E$ donc en utilisant (1),
$\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq k,\ i \neq j} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0_E \quad (2)$

Il s'agit en fait d'une somme de $k-1$ termes, combinaison linéaires de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ! D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) = 0,\ \forall i \neq j$, donc $\alpha_i = 0,\ \forall i \neq j$, puis dans (1), $\alpha_j = 0$, d'où la liberté de $(v_1, \dots v_k)$ $\square$

lemme 15. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux dictinctes de u.*
Alors la somme des sous-espaces propres est directe :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} \subset E$ *; et de plus,* $\displaystyle\dim\left(\sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} \dim E_{\lambda_i}$

démonstration :

Pour $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}$, montrons que tout vecteur $\overrightarrow{x} \in F$ admet une unique décomposition dans la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{\lambda_i}$.

S'il existe $(\overrightarrow{x_i})_{1 \leq i \leq s}, (\overrightarrow{x_i}')_{1 \leq i \leq s} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$ tels que $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \overrightarrow{x_i} = \sum_{i=1}^{s} \overrightarrow{x_i}'$, alors on obtient :

$$\sum_{i=1}^{s} 1(\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}') = \overrightarrow{0} \qquad (\star)$$

Par l'absurde, si $(\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}')_{1 \leq i \leq s} \neq (\overrightarrow{0})_{1 \leq i \leq s}$, la relation $(\star)$ est une relation de dépendance linéaire à coefficients non nuls et faisant intervenir des vecteurs nuls ou vecteurs propres, avec au moins un vecteur non nul : cela contredit la liberté de la famille de vecteurs propres constituée des $\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}' \neq \overrightarrow{0}$ pour $1 \leq i \leq s$, Impossible !

Donc $\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_i}' = \overrightarrow{0}$ pour tout $1 \leq i \leq s$, et l'unicité. $\square$

2.b) Dimension des sous-espaces propres

lemme 16. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E <u>stable</u> par u. Alors* $\boxed{\chi_{u_{|F}} \text{ divise } \chi_u.}$

<u>*démonstration :*</u> Soit G un supplémentaire de F dans E. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on calcule par blocs, pour $x \in \mathbb{K}$: $\chi_u(x) = \det([u - xid_E]_{\mathcal{B}}) = \det([u_{|F} - xid_F]) \times \det([u_{|G}^{|G} - xid_G])$, donc $\chi_{u_{|F}} = \det([u_{|F} - xid_F])$ divise $\chi_u(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{K}$. □

Proposition 17 (majoration de la dimension des s.e.p. par leur multiplicité).

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, de multiplicité m_λ, et E_λ le sous-espace propre associé.
Alors $\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.}$

démonstration :
Tout d'abord comme λ est une valeur propre, $u - \lambda id$ n'est pas injective, donc $d_\lambda = \dim(E_\lambda) \geq 1$.
Pour $F = E_\lambda$, et d_λ sa dimension, on remarque que $u_{|F} = \lambda id_F$, donc $\chi_{u_{|F}} = (\lambda - X)^{d_\lambda}$. En notant s le nombre de valeur propres distinctes de u, et $\lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes et distinctes de λ, de multiplicités respectives $m_{\lambda_2}, \dots, m_{\lambda_s}$, on obtient, grâce à la factorisation sur $\mathbb{C}$:
$(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda} \prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$.

Comme $(X - \lambda)^{d_\lambda}$ est premier avec $\prod_{i=2}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, on a donc $(X - \lambda)^{d_\lambda} | (X - \lambda)^{m_\lambda}$, donc $d_\lambda \leq m_\lambda$. □

2.c) CS et CNS de diagonalisabilité

Théorème 18 (CNS de diagonalisabilité).

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$, et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ leurs sous-espaces propres respectifs.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) <u>u est diagonalisable</u> <u>sur $\mathbb{K}$</u> ;

ii) $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}}$;

iii) $\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}}$ et $\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n$.

iv) $\boxed{\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda)}$.

démonstration : l'implication $i) \Rightarrow ii)$ est vraie, car alors $E \subset \sum E_\lambda$ (puisque chaque droite $\mathrm{Vect}(v_i) \subset \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{id}_E - u) = E_{\lambda_i}$), d'où l'égalité.

l'implication $ii) \Rightarrow i)$ est immédiate, car toute base adaptée dans une base de vecteurs propres regroupés en blocs par valeurs propres identiques, on obtient une base de E adaptée à la somme des directe des sous-espaces propres.

On a donc l'équivalence $i) \iff ii)$.

On a dans le cas général : $n = \dim E = \deg \chi_u = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^{s} \dim E_{\lambda_i}$ et $\quad \forall\, 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq \dim E_{\lambda_i} \ \leq m_{\lambda_i}$.

Supposons $ii)$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\det([u - xid]_{\mathcal{B}}) = (-1)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{\dim(E_{\lambda_i})}$. Comme $\chi_u(x) = (-1)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, on obtient en identifiant : pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $m_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_i})$, d'où $iii)$.

Supposons $iii)$. On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$.Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = \deg(\chi_u) = \dim(E)$, on obtient :

$\dim(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}) \underset{somme\ directe}{=} \sum_{i=1}^{s} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = \dim(E)$, donc l'inclusion $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} \subset E$ est en fait une égalité, d'où $ii)$. □

Variante sommes directes $ii) \iff iv)$

Proposition 19 (CS de diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u.
Si $\boxed{\chi_u \text{ est scindé}}$ $\boxed{\boxed{\text{à racines simples}}}$ sur $\mathbb{K}$, alors $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

démonstration :

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de u. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$, donc on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \geq n = \dim E$. Comme on a toujours $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \leq n = \dim E$, on obtient l'égalité.

Donc $m_{\lambda_1} = 1 = \dim(E_{\lambda_i})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. Le iii) du théorème précédent donne le résultat. □

Proposition 20 (CS de diagonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A.
Si $\boxed{\chi_A \text{ est scindé}}$ $\boxed{\boxed{\text{à racines simples}}}$ sur $\mathbb{K}$, alors $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

Remarque 8. **!!!!!!**
Attention, la réciproque est fausse :
$\chi_{id} = (1 - X)^n$ n'est pas scindé à racines simples, pourtant id est diagonalisable.

exemple 2. Projecteurs : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, avec $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Inv}(p) = \{v;\ p(v) = v\}$

exemple 3. Symétrie $E = \mathrm{Opp}(p) \oplus \mathrm{Inv}(p)$, avec $\mathrm{Inv}(p) = \{v;\ s(v) = v\}$ et $\mathrm{Opp}(p) = \{v;\ s(v) = -v\}$

III. Trigonalisation

Définition 17.

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 21 (C.N.S de trigonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\boxed{\text{le polynôme caractéristique}}$ χ_A de A est $\boxed{\text{scindé}}$ sur $\mathbb{K}$.

i.e. ssi $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{K});\ T = P^{-1}AP$ triangulaire

dém :
ADMIS, preuve non exigible
C.N. : clair, $\chi_T = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - t_{ii})$
C.S. : par récurrence sur n.
initialisation $n = 1$: OK.
hérédité : Si χ_u scindé pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $n = \dim E$, alors χ_u admet une racine λ, et pour v_1 vecteur propre associé, on complète en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2', \dots v_n')$ de E.
Mais alors pour $F = \mathrm{Vect}(v_2', \dots v_n')$, de dimension $n-1$, par hypothèse de récurrence, on a pour p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(v_1)$ et $w = p \circ u_{|F}$, $\chi_w | \chi_u$, et il existe une base $(v_2, \dots, v_n)$ de F qui trigonalise w. Pour $i \geq 2$, $u(v_i) = \alpha_i c_1 + p \circ u_{|F}(v_i)$ qui est triangulaire supérieure.

Définition 18.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

IV. Applications

IV.1 Calcul de puissances par diagonalisation

1.a) Calcul de puissances par diagonalisation

Proposition 22.

Soit $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$,$D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$ diagonale, alors

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n^k \end{pmatrix}}$$

pour $k = 0$, on a $I_n = D^0 = Diag(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Supposons la relation est vraie pour un indice $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $D^{k+1} = Diag(\delta_1, \dots, \delta_n) Diag(\delta_1^k, \dots, \delta_n^k) = Diag(\delta_1^{k+1}, \dots, \delta_n^{k+1})$, d'où l'hérédité. □

Proposition 23.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$, $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix} = D$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}}$$

démonstration : par récurrence sur k.

pour $k = 0$, on a $I_n = A^0 = P^{-1} I_n P = D^0$.

Supposons la relation est vraie pour un indice $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $A^{k+1} = A \times A^k = PDP^{-1}PD^kP^{-1} = PDI_nD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$, d'où l'hérédité. □

1.b) Calcul de puissances par trigonalisation

Lorsque la matrice A est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure $D+N$, avec $\boxed{DN = ND}$, D diagonale.

On a $N_{i,j} = 0 \ \forall i \geq j$ ($N^m = 0_n$, donc N est nilpotente), alors la formule du binôme de Newton montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k}N^k = D^p + pD^{n-1}N + \frac{p(p-1)}{2}D^{p-2}N^2 + \cdots + \binom{p}{m-1} D^{p-m+1}N^{m-1}$$

ce qui permet de calculer A^p grâce aux formules de passage.

1.c) Systèmes linéaires

Remarque 9. Pour déterminer une suite (X_n) de $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k}$$

avec $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ connue, il suffit de savoir déterminer les puissances A^p pour tout p entier puis de remarquer que $X_p = A^p X_0$.

On parle de système de récurrence linéaire à coefficients constants sous la forme (détaillée) suivante :

$$\begin{cases} x_{(k+1),1} & = & a_{11}x_{(k),1} & + \cdots + & a_{1n}x_{(k),n} \\ \ldots \\ x_{(k+1),k} & = & a_{k1}x_{(k),1} & + \cdots + & a_{kn}x_{(k),n} \\ \ldots \\ x_{(k+1),n} & = & a_{n1}x_{(k),1} & + \cdots + & a_{nn}x_{(k),n} \end{cases}$$

Où $(a_{i_j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont fixés, le vecteur colonne (initial) $X_0 = \begin{pmatrix} x_{(0),1} \\ \vdots \\ x_{(0),n} \end{pmatrix}$ est connu, et la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs colonnes $X_k = \begin{pmatrix} x_{(k),1} \\ \vdots \\ x_{(k),n} \end{pmatrix}$ est inconnue.

exemple 4. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ **diagonalisable** et dont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Soient $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

En pratique : étant donné $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, *la suite* $\left(PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}\right)_n$ *est l'unique suite* $(X_n)_n$ *de vecteurs de* $\mathbb{K}^3$ *telle que :*

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \end{cases}.$$

1.d) Suites récurrentes linéaires d'ordre ℓ à coefficients constants

Méthode : *Suites récurrentes linéaires d'ordre ℓ à coefficients constants, sans second membre*

Etant donnés $\ell \in \mathbb{N}$, avec $\ell \geq 2$, $a_{\ell-1}, \dots, a_0$, , on cherche à trouver toutes les suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0 u_n$$

A partir des conditions initiales $(u_0, \dots, u_{\ell-1}) \in \mathbb{K}^\ell$, on se ramène au cas précédent en posant $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{\ell-1} \end{pmatrix}$, et

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & & a_{\ell-1} \end{pmatrix}$ On vérifie alors que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k$, car :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} C_i}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \\ P(x) & -a_1 & & & x - a_{\ell-1} \end{vmatrix}$$

où $P(x) = -\sum_{j=0}^{\ell-2} a_j x^j - a_{\ell-1}x^{\ell-1} + x^\ell$

(matrices compagnon).

Proposition 24.

En particulier pour une relation de récurrence $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0 u_n$, si le polynôme caractéristique $\chi_A(r) = r^\ell - \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k r^k = \prod_{j=1}^{n} (r - \delta_j)$ est simplement scindé sur $\mathbb{C}$, alors il existe des constantes $(c_1 \dots, c_n)$ telles que : $\forall p \in \mathbb{N},\ u_p = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_k^p$.

dém : On diagonalise et on a $A^n = PD^nP^{-1}$, donc $A^n V_0$ est combinaison linéaire des coefficients de P, P^{-1} et des (δ_j^n). □

Remarque 10. Application numérique : calcul d'une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives $\lim \frac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)} = \lambda$.

V. Suites récurrentes linéaires en dimension 2

V.1 Calcul de puissances en dimension 2

a) Cas des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Soient $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ ayant deux valeurs propres **distinctes** r_1 et r_2, associées à des vecteurs propres respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Soit $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$, et P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.
Alors, on montre par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1}}$$

En pratique : étant donné la condition initiale $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, la suite $\left(PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}\right)_n$ est l'unique suite $\left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right)_n$ de vecteurs de $\mathbb{K}^2$ telle que : $\begin{cases} u_0 = U_0, \text{ et } v_0 = V_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \end{cases}$.

Remarque : lorsque A est diagonalisable et $r_1 = r_2$, cela reste vrai, et A est la matrice de l'homothétie $r_1 id$.

b) Cas des matrices trigonalisables de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ **trigonalisable** (et non diagonalisable), ayant une unique valeur propre r, et telle que le sous-espace propre associé E_r soit une droite vectorielle, dirigée par un vecteur (propre) w.
En complétant (w) en une base $B_1 = (w, t)$, on montre que A est semblable à une matrice triangulaire de la forme : $T = \begin{pmatrix} r & \gamma_{2,1} \\ 0 & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$. Les matrices A et T sont semblables, donc ont le même polynôme caractéristique $(X - r)^2$, donc $\gamma_{2,2} = r$ (on ne peut avoir $\gamma_{2,1} = 0$, sinon A serait diagonalisable et $\dim E_r = 2$).
Dans la base $B' = (w_1, \frac{1}{\gamma_{2,1}} t_1)$, la matrice de l'endomorphisme sous-jacent est $T = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.
Alors, on montre par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}}$, *car :* $\forall n\ T \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{n+1} & r.nr^{n-1} + 1.r^n \\ 0 & r^{n+1} \end{pmatrix}$.
En notant P la matrice de passage de la base canonique à B', on a $T = P^{-1}AP$. Alors, on montre par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = P \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix} P^{-1}}$

En pratique : étant donné la condition initiale $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, la suite $\left(PT^nP^{-1}\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}\right)_n$ est l'unique suite $\left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right)_n$ de vecteurs de $\mathbb{K}^2$ telle que : $\begin{cases} u_0 = U_0, \text{ et } v_0 = V_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \end{cases}$.

V.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

a) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants sans 2^d membre

Méthode :
Soient $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, et $(U_0, U_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = U_0, \text{ et } u_1 = U_1 \\ \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\mathcal{H})} \end{cases}.$$

- On résout **l'équation caractéristique** (d'inconnue r) : $r^2 - ar - b = 0 \quad (*)$.
- Elle admet deux solutions (sur $\mathbb{C}$) r_1 et r_2.

i) Si $\boxed{r_1 \neq r_2}$, le système (d'inconnue (λ, μ)) $\begin{cases} \lambda + \mu &= U_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &= U_1 \end{cases}$ est de Cramer, et admet une unique solution (λ_0, μ_0). On a alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0 r_1^n + \mu_0 r_2^n.}$

ii) Si $\boxed{r_1 = r_2}$, le système (d'inconnue (λ, μ)) $\begin{cases} \lambda &= U_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_1 &= U_1 \end{cases}$ est de Cramer ($r_1 \neq 0$ car $b \neq 0$), et admet une unique solution (λ_0, μ_0). On a alors :$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0 r_1^n + \mu_0 n r_1^n.}$

Remarque : *en posant, pour tout n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} X_n$. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, l'équation caractéristique de la récurrence détermine les racines du polynôme caractéristique $\chi_A = X^2 - aX - b$: ce sont les valeurs propres de A.*

b) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants avec 2^{nd} membre

Méthode :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$. Pour trouver toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n + c \quad (\mathcal{E})}$:

$\boxed{\star \text{ si } 1 - a - b \neq 0}$, on résout l'équation $\ell = a\ell + b\ell + c$, la suite constante $(\ell)_n$ est une solution particulière, et la suite $(v_n)_n = (u_n - \ell)_n$ vérifie une relation de récurrence homogène que l'on résout, on en déduit l'expression de $(u_n)_n = (v_n + \ell)_n$.

$\boxed{\star \text{ si } 1 - a - b = 0 \text{ et } 2 - a \neq 0}$, on cherche une solution particulière sous la forme $(n\alpha)_n$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$. L'équation $2\alpha = a\alpha + b + c$ fournit α, et la suite $(v_n)_n = (u_n - n\alpha)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène que l'on résout.

$\boxed{\star \text{ si } 1 - a - b = 0 \text{ et } 2 - a = 0}$, on cherche une solution particulière sous la forme $(n(n-1)\alpha)_n$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$. L'équation $\alpha[(n+2)(n+1) - 2(n+1)n + n(n-1)] = c$ fournit $\alpha = \dfrac{c}{2}$, et la suite $(v_n)_n = (u_n - \dfrac{cn(n-1)}{2})_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène que l'on résout.

Proposition 25.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, et $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ l'ensemble des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant l'équation de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (\mathcal{H})}$

i) Si A admet **deux valeurs propres distinctes** r_1 et r_2, alors $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2, dont une base est $((r_1^n)_n, (r_2^n)_{n \geq 0})$, i.e. $\boxed{\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \geq 0};\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2)\}.}$
De plus, pour tout $(U_0, U_1) \in \mathbb{K}^2$ fixé, la suite $\left(\dfrac{U_0 r_2 - U_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \dfrac{U_0 r_1 - U_1}{r_1 - r_2} r_2^n \right)_{n \geq 0}$ est l'unique élément de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ de premier terme U_0 et de second terme U_1.

ii) Si A admet une **unique valeur propre** (double) r, avec $\dim E_r = 1$, alors $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2, dont une base est $((r^n)_n, (nr^n)_{n \geq 0})$, i.e. $\boxed{\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}} = \{(\lambda r^n + \mu n r^n)_{n \geq 0};\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2)\}.}$
De plus, pour tout $(U_0, U_1) \in \mathbb{K}^2$ fixé, la suite $\left(U_0 r^n + \dfrac{U_1 - rU_0}{r} n r^n \right)_{n \geq 0}$ est l'unique élément de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ de premier terme U_0 et de second terme U_1.

<u>*démonstration :*</u> Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on a pour tout n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $\begin{vmatrix} -r & 1 \\ b & a-r \end{vmatrix} = r^2 - ar - b$, dont les racines sont r_1 et r_2.

i) $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ est clairement un $\mathbb{K}$-e.v.. Pour rour $n \geq 0$, $r_1^{n+2} = r_1^n(r^2) = r_1^n(ar_1 + b) = ar_1^{n+1} + br_1^n$, donc la suite $s_1 = (r_1^n)_n$ appartient à $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$. De même la suite $s_2 = (r_2^n)_n$ appartient à $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$. Le §IV.3)b) (et le calcul de A^n) assure que $(u_n)_n \in \mathrm{Vect}((r_1^n)_n, (r_2^n)_n)$, donc toute suite de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ appartient à $\mathrm{Vect}(s_1, s_2)$.

Pour (λ, μ) tels que $\lambda s_1 + \mu s_2 = (0)_n$, on a en particulier (pour $n = 0$ et $n = 1$) $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$, et comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \mu = 0$, donc la famille (s_1, s_2) est libre.

Donc (s_1, s_2) est une base de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$.

ii) On montre de la même manière que $s_1 = (r^n)_n$ appartient à $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$. En remarquant que pour tout n, $(n+2)r^{n+2} = r^n(n+2)(r^2) = r^n(n+2)(ar+b) = r^n(n+2)(ar+b) = a(n+1)r^{n+1} + bnr^n + (ar+2b)r^n$, comme la suite $((ar+2b)r^n)_n$ appartient à $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$, on en déduit que la suite $s_2 = (nr^n)_n$ appartient à $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$. Le §IV.3)b) assure que toute suite de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$ appartient à $\mathrm{Vect}(s_1, s_2)$. Pour (λ, μ) tels que $\lambda s_1 + \mu s_2 = (0)_n$, on a en particulier (pour $n = 0$ et $n = 1$) $\lambda = 0$ et $\lambda r + \mu r = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$, donc la famille (s_1, s_2) est libre. Donc (s_1, s_2) est une base de $\mathcal{S}_{2,\mathcal{H}}$. $\square$

VI. Complément endomorphismes qui commutent

Proposition 26.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors tout s.-e.v. stable par u est stable par v.

démonstration : Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.
Pour $x \in F$, on a $v(u(x)) = u(v(x))$

Proposition 27.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

démonstration : $u(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$.
$[y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)] \Rightarrow \ [v(y) = v(u(x)) = u((x)) \in \operatorname{Im}(u)]$. □

Application : diagonalisation simultanée

si u et v commutent, et que u est diagonalisable, alors les $\lambda \mathrm{Id}_E - u$ commutent avec v, donc les sous-espaces-propres de u sont stables par v. Si les endomorphismes induits $v_{|E_{\lambda,u}}$ sont diagonalisables dans des bases $\mathcal{B}_\lambda$, alors la famille $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)}$ diagonalise u et v.

Application : racine carrée d'une matrice

En particulier, lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on peut ainsi déterminer les matrices R telles que $R^2 = A$: elles commutent avec A et les sous-espaces propres de A sont stables par de tels R.

Il suffit de diagonaliser A, et on obtient $P^{-1}AP = D$ diagonale. En posant $\Delta = P^{-1}RP$, on a $\Delta^2 = D$ et comme $\Delta D = D\Delta$, on en déduit que Δ est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont des racines des valeurs propres de A correspondantes.

VII. Rappel : Limite d'une suite vectorielle

$\lim X_n$ ou $\lim A_n$ coordonnée par coordonnée

Programme PC :

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires, dont la résolution repose sur des outils similaires.

La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.	Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.
Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.	
Multiplicité d'une valeur propre.	
Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.	
b) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace .	Exemple des projecteurs et des symétries.

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.	
Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Interprétation matricielle de ces résultats.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre p à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique admet p racines distinctes.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

c) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	
Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. $\leftrightarrows$ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.	