Table des matières

Pré-requis

Objectifs

On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, et on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Séries de fonctions

I.1 Convergence simple : définitions, exemples

Définition 1 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}}$ de ses fonctions **sommes partielles** par :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N : x \mapsto \sum_{k=0}^{N} u_k(x)$$

Définition 2 (Série de fonctions).

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, et $(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses fonctions sommes partielles, on appelle **série de fonctions** de **terme général** u_n le couple $((u_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}, (S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}})$, que l'on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(\cdot)$ ou $\sum u_n$.

Définition 3.

Soit I un intervalle réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **converge simplement** sur I (vers sa somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$) si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \text{la suite} \left(\sum_{k=0}^{N} u_k(x)\right)_{N\geq 0} \text{converge}}$$

i.e. si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge (dans $\mathbb{K}$).

Si tel est le cas, on définit la **somme de la série de fonctions** $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(\cdot)$, que l'on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(\cdot)$ ou

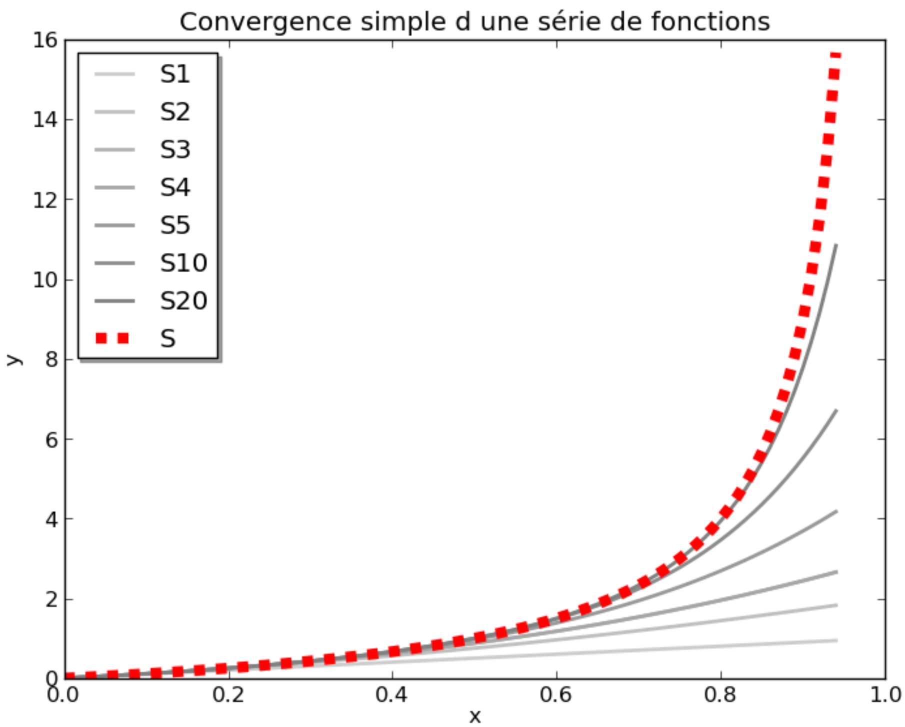
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n},\ \text{par :}\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \end{array}.$$

Remarque 1. En d'autres termes, la série de fonctions $\sum_n f_n$ CVS sur I vers S si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 = N_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall N \geq N_0,\ |\sum_{k=0}^{N} f_k(x) - S(x)| \leq \varepsilon\right)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence dépend du point x considéré !!!

exemple 1. La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ vers la fonction $S : x \longrightarrow \dfrac{x}{1-x}$



I.2 Convergence uniforme

Définition 4.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I vers sa sommme $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\sup_{t\in I}\left\{\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(t) - S(t)\right|\right\} = \|S_N - S\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque 2. En d'autres termes, $\sum u_n$ CVU sur I vers S sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; (\forall N \geq N_1,\ \forall x \in I,\ |S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence ne dépend pas du point de I considéré !!!

Remarque 3. ATTENTION : La réciproque est fausse !!!

exemple 2. La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$
converge simplement sur $I = [0,1[$ vers la fonction $S : x \longrightarrow \dfrac{x}{1-x}$, mais pas uniformément, car $\|S_N - S\|_{\infty,[0,1[} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^{N+1}}{1-x} = +\infty$

I.3 Convergence normale

Définition 5.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge normalement** sur I si la série numérique (positive) $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n\|_{\infty,I}$ converge.

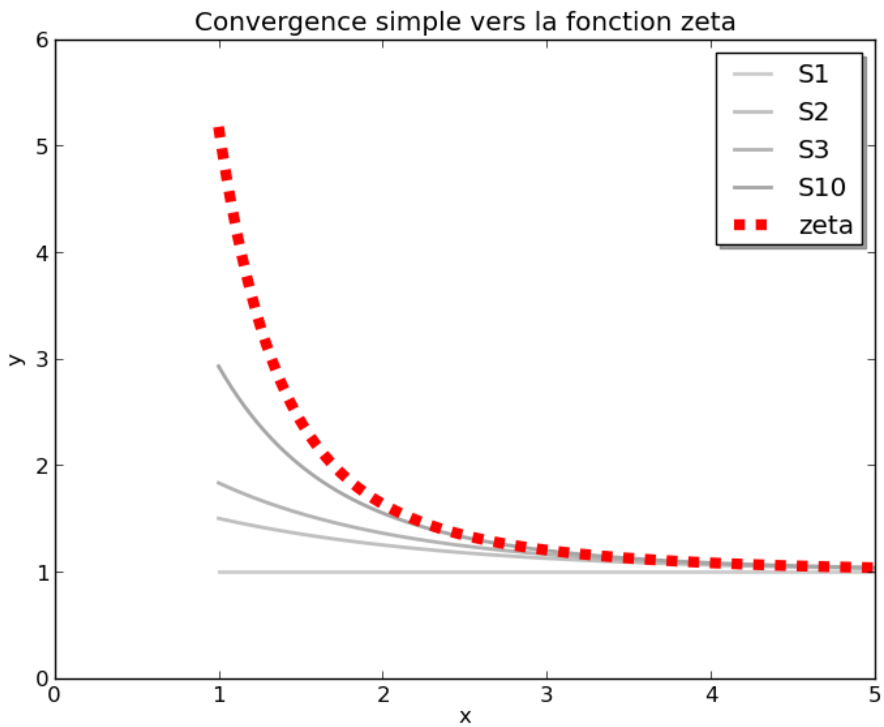
exemple 3. Soient $\gamma \in [0,1[$, $J = [0,\gamma]$ et les fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ de converge normalement sur J, car $\|a_n\|_{\infty,J} = \gamma^n$, donc la série géométrique $\sum \|a_n\|_{\infty,J}$ de raison $\gamma \in [0,1[$ converge.

exemple 4. La série $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ de fonctions (a_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} z_n : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^x} \end{array}$
converge simplement sur $I =]1,+\infty[$ vers la fonction $\zeta : x \longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Pour tout $a > 1$, comme $\|z_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$, la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

Mais comme $\|z_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$, la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$.



Proposition 1.

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément.
Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ converge normalement sur I, alors elle converge simplement.

démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$. Alors pour tout $x \in I$, on a :
$\forall n \geq n_1,\ |u_n(x)| \leq \|u_n\|_{\infty,I}$, donc par comparaison de séries positives, $\sum |u_n(x)|$ converge, donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit la convergence simple de $\sum u_n$ sur I et on note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Pour tout $P \geq n_1 + 1$, on a $\left|\sum_{n=n_1}^{p} u_n(x)\right| \underset{\text{somme finie}}{\leq} \sum_{n=n_1}^{p} |u_n(x)| \leq \sum_{n=n_1}^{p} \|u_n\|_{\infty,I}$, et à la limite (tout étant convergeant), $R_{n_1} = \left|\sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_1}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,I} = \varepsilon$

Mais alors, pour $N \geq n_1$, on a, pour tout $x \in I$, $|S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon$,
i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N};\ \forall N \geq n_1,\ \|S_N - S\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$, d'où la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur I. $\square$

Remarque 4. Attention, la réciproque est fausse !

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ de fonctions (f_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ (par le CSSA, ou car ACV, par exemple)

Elle ne converge pas normalement sur $I = [0,1[$, car $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,I} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Elle converge uniformément, car $\|S_N - S\|_{\infty,[0,1[} \leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \right| \xrightarrow[N\to+a]{} 0$

exemple 5. Attention, la réciproque est fausse !

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ de fonctions (g_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccl} g_n : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1[$, mais ne converge pas uniformément.

Proposition 2.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ un série de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et $\sum \alpha_n$ une série numérique (positive) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq \alpha_n)$$

et telle que $\sum \alpha_n$ converge.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I.

démonstration : on utilise le théorème de comparaison de séries numériques positives : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \|u_n\|_{\infty,I} = \sup\{|u_n(x)|,\ x \in I\} \leq \alpha_n$. $\square$

Remarque 5. En pratique, pour montrer la convergence normale de $\sum u_n$ sur I :

— ou bien, à n fixé, on sait majorer directement $|u_n(x)|$ indépendemment de $x \in I$, par le terme général α_n d'une série convergente.
  exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \dfrac{1}{1+n^2+x^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$.

— ou bien, à n fixé, on étudie les variations sur I de u_n, et on en déduit la valeur de $\|u_n\|_{\infty,I}$

II. Propriétés de la somme d'une série de fonctions

II.1 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 3.

Soient I un intervalle réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I vers $S \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est continue sur I.

démonstration : On applique le théorème de continuité vu pour une limite uniforme d'une suite de fonctions à la suite (S_N) des sommes partielles qui sont continues (sommes finies) et qui CVU vers S. $\square$

Remarque 6. La somme normalement convergente d'une séries de fonctions continues est continues, car pour une série de fonctions continues qui converge normalement sur I, il y a convergence uniforme.

Remarque 7. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I, on obtient la continuité sur I.
exemple : $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$, comme somme de fonctions continues qui CVU (car CVN) sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$.

exemple 6. La somme d'une série de fonctions continues peut ne pas être continue.

Par exemple, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ de fonctions continues (u_n) définies par : $u_0 : x \mapsto 1$, et

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \begin{array}{rccl} u_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n - x^{n-1} \end{array}$

converge simplement sur $I = [0, 1]$, mais sa somme $S : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ n'est pas continue.

II.2 Interversion limite-intégrale

2.a) Intégration terme à terme sur un segment

Proposition 4 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soient $I = [a, b]$ un segment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, telle que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $S \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors la série numérique $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)\ \mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t$$

démonstration :

On applique le résultat précédent à la suite $(S_N) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k \right)$ des sommes partielles.

2.b) Intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque

Théorème 5 (d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** et **intégrable** sur I ;

ii) la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** sur I vers une fonction S **continue par morceaux sur** I ;

iii) la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge. (hypothèse de domination)

Alors la somme S de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ $\boxed{\text{est intégrable sur } I}$, la série $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I f_n \text{ converge}}$, et $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

démonstration : admis idée on applique le TCD à la suite des sommes partielles.

II.3 Dérivabilité

3.a) Série de fonctions

Proposition 6.

Soient I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et telle que la série $\sum u_n'$ de ses dérivées converge uniformément sur I vers $T \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$.

démonstration : on applique aux sommes partielles (S_N) le résultat sur les suites de fonctions. □

Proposition 7.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ et que les séries $\sum u_n^{(i)}$ CVS sur I vers $S_i \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$, et telle que la série $\sum u_n^{(k)}$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $S_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S^{(i)} = S_i$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. □

Programme PC :

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme :
si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :
soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :
soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme.

Contenus	Capacités & Commentaires

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.