Table des matières

Pré-requis

Somme des termes d'une suite géométrique, théorème des suites adjacentes, séries numériques de 1ère année

Objectifs

I. Rappels de PCSI

I.1 Vocabulaire et définitions

Définition 1 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses **sommes partielles** par :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$$

Définition 2 (Série numérique, nature).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles, on appelle **série numérique de terme général** u_n le couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$, que l'on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

• Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite ℓ FINIE,
on dit que la **série** $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **converge**,

et la valeur de la limite de cette suite est appelée **somme** de la série, et est notée $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

• Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles n'admet pas de limite FINIE,
on dit que **la série** $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **diverge**

(il est alors impossible d'écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ pour cette série divergente).

Remarque 1. $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} u_n \text{ existe et est FINIE.}}$

exemple 1. La série (téléscopique) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge, car la suite $\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)_{N\geq 1}$ de ses sommes partielles converge. La somme de la série vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$

exemple 2. La série $\sum\limits_{n\geq 0} 1$ diverge, var la suite $(N+1)$ de ses sommes partielles diverge. Il est INTERDIT d'écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$: la somme n'existe pas ! ! !

Définition 3 (Reste).

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le **reste** d'ordre N, et on a : $R_N + S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, en notant S_N la somme partielle d'indice N.

I.2 Série à termes positifs

Proposition 1 (CNS de convergence d'une série positive).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ On a : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N} u_k \leq M$$

démonstration : La suite des sommes partielles (S_N) est croissante. Elle converge si et seulement si elle est majorée par une constante (FINIE). □

I.3 Grossière divergence

Proposition 2 (grossière divergence).

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$.
Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge, on parle alors de **grossière divergence**.

démonstration : $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Si (S_n) admet une limite finie ℓ, alors (u_n) a pour limite $\ell - \ell = 0$. □

I.4 Séries géométriques

Proposition 3 (séries géométriques).

$\boxed{\sum_{n\geq 0} a^n \text{ converge} \iff |a| < 1}$, auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

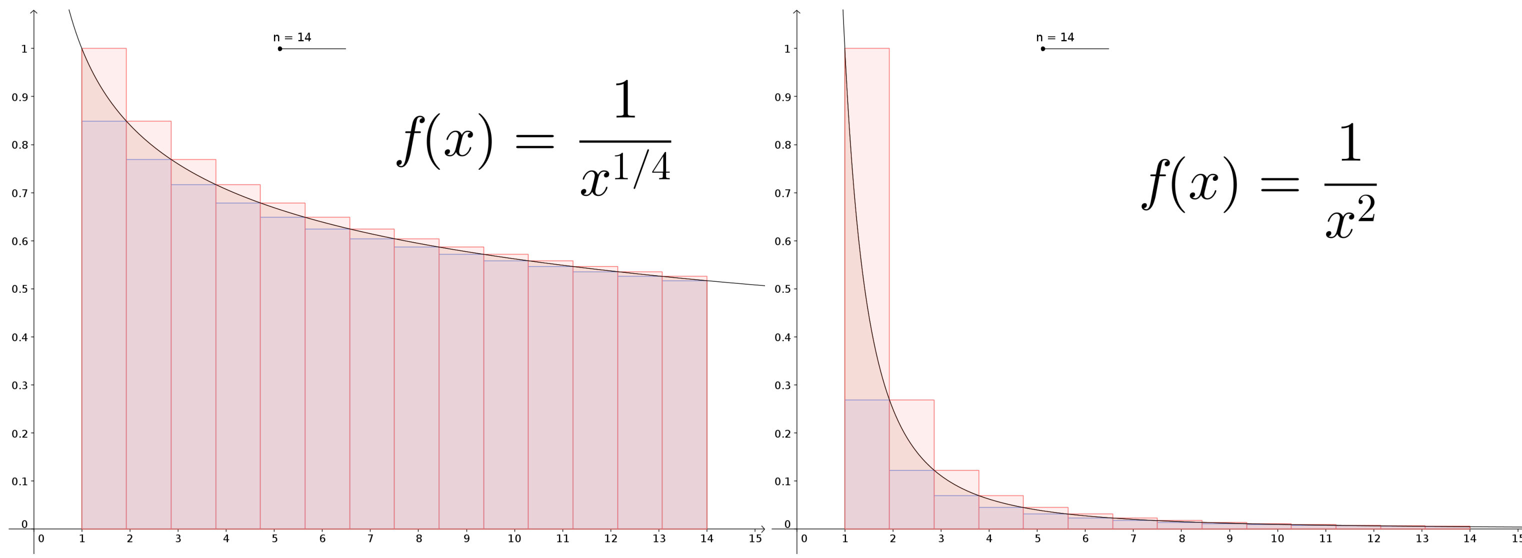
démonstration : Pour $a \neq 1$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$, qui converge vers une limite finie si et seulement si $|a|^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, ssi $|a| < 1$. Si tel est le cas, la somme vaut $1/(1-a)$.

Le cas $a = 1$ est direct : la série est grossièrement divergente. □

exemple 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=2$

exemple 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}3^n$ diverge.

I.5 Séries de Riemann



Proposition 4 (séries de Riemann).

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

démonstration :

- Cas $\alpha \leq 0$: $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 : il y a grossière divergence.
- Cas $\alpha \in]0,1[$: on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha}\geq\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, donc $\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^N\frac{1}{n^\alpha}\geq\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\frac{(N+1)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$.
- Cas $\alpha=1$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\geq\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}$, donc $\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}\geq\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln(N+1)-\ln(1)\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$.
- Cas $\alpha>1$: on a $\forall n\geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, donc $\displaystyle 0\leq S_N=\sum_{n=2}^N\frac{1}{n^\alpha}\leq\int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\frac{(N)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}\leq\frac{1}{1-\alpha}$. Les sommes partielles sont majorées, donc la série à termes positifs converge. □

exemple 5. Les séries de Riemann (PCSI) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ sont convergentes, mais les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.

I.6 Séries absolument convergentes, comparaison

Proposition 5 (comparaison de séries positives).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a :
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.

démonstration : Pour les sommes partielles, on a $0 \leq U_N \leq V_N,\ \forall N \in \mathbb{N}$.
Si (V_N) converge, alors la limite majore les sommes partielles de la série positive $\sum u_n$, donc elle converge.
Si (U_N) diverge, alors la limite des sommes partielles de la série positive $\sum u_n$ est $+\infty$, et par comparaison de suites, (V_N) diverge vers $+\infty$, donc $\sum v_n$ diverge. $\square$

Définition 4.

On dit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série (positive) $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition 6.

Toute série absolument convergente est convergente.

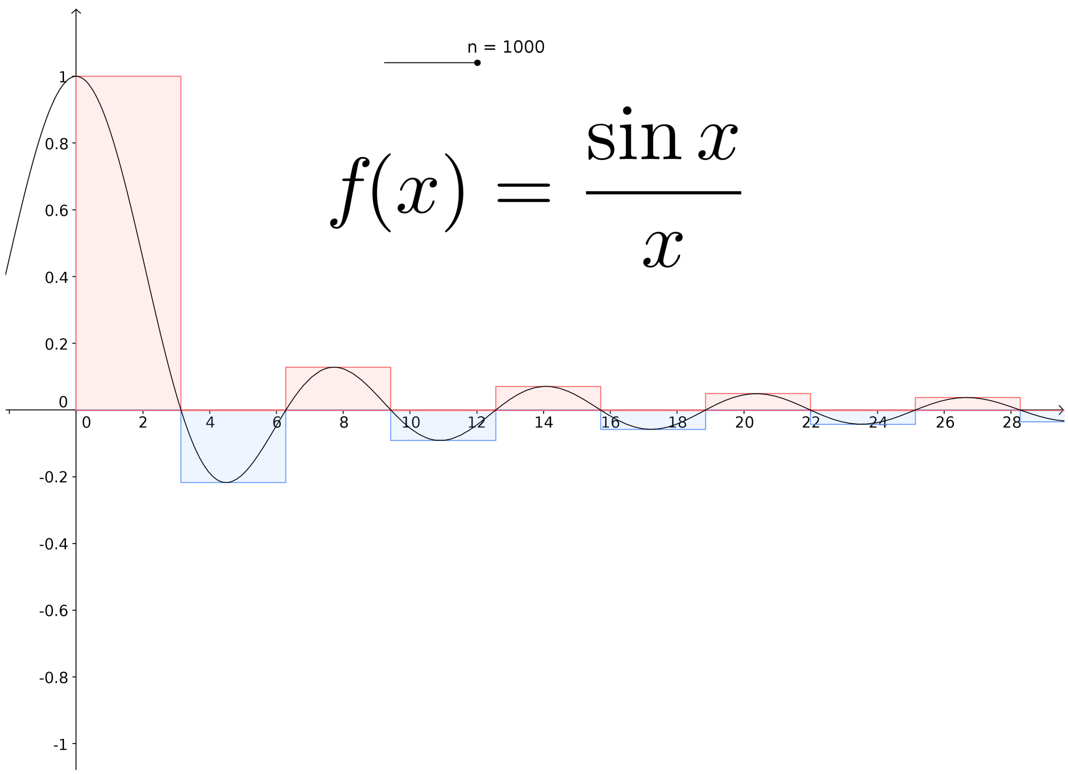
démonstration : Dans le cas d'une suite réelle (u_n), on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n^+ = \max(0, u_n) = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$ et $u_n^- = -\max(0, u_n) = \dfrac{-u_n + |u_n|}{2}$, de sorte que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^-,\ 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|,\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.

Si $\sum |u_n|$ converge, alors par comparaison de séries positives, $\sum u_n^+$ converge vers une limite finie L^+, et $\sum u_n^-$ converge vers une limite finie L^-. On en déduit que $\sum\limits_{n} = 0^N u_n = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n^+ - \sum\limits_{n=0}^{N} u_n^- \xrightarrow[N\to+\infty]{} L^+ - L^-$, donc que $\sum u_n$ converge.

Dans le cas complexe, on se ramène au cas réel en remarquant que $|\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n|$, donc $\sum \operatorname{Re} u_n$ est ACV. Et on procède de même pour $\sum \operatorname{Im} u_n$. $\square$

Remarque 2. Attention, il existe des séries numériques convergentes, non absolument convergentes !

On montrerait que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n}$ converge, mais que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{|\sin n|}{n}$ diverge.



Proposition 7 (comparaison à une série positive).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a :

i) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0,\ v_n > 0$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

démonstration : Le premier point résulte directement du théorème de comparaison entre séries à termes positifs, et du fait que l'absolue convergence implique la convergence.

Pour le second point, il suffit de remarquer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq 2v_n + n^{-2}$, et on conclut grâce au théorème de comparaison de séries positives. $\square$

II. Comparaison série-intégrale

Théorème 8 (Comparaison série intégrale).

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue par morceaux**, **décroissante** et **positive**. Alors

La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(c.à.d. la série et l'intégrale ont même nature : elles sont simultanément convergentes ou divergentes)

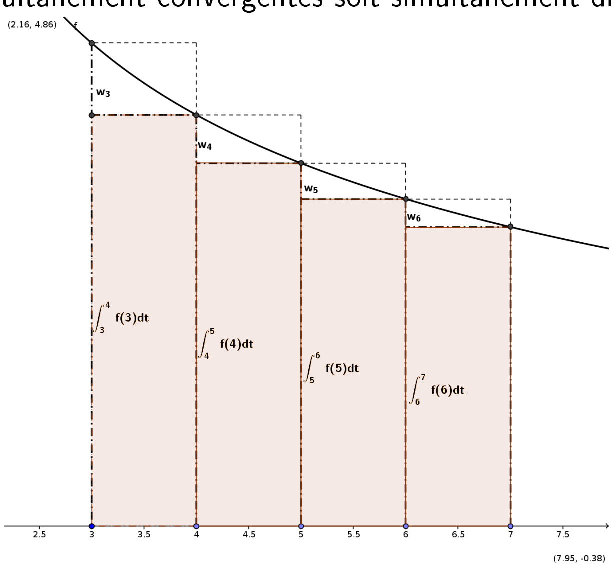
démonstration :

En posant $\forall n \geq n_0,\ w_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n+1)$, on a $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq w_n \leq f(n) - f(n+1)$.

• Montrons que la série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ converge.

Soit $n \geq n_0$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a,par décroissance de f, $f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)$.
En intégrant (on peut le faire car f est continue par morceaux), par croissance de l'intégrale, on obtient :
$\int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}t$, soit $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \geq f(n+1)$.
Ainsi, $f(n) - f(n+1) \geq w_n \geq 0$.
La série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ est donc une série à termes positifs. De plus, pour tout $N \geq n_0$, on a :
$\sum_{k=n_0}^{N} w_k \leq \sum_{k=n_0}^{N} (f(k) - f(k+1)) = f(n_0) - f(N+1) \leq f(n_0)$. Donc la série $\sum_{n\geq n_0} w_n$ converge, vers une limite ℓ.

• On en déduit le résultat : pour tout $N \geq n_0$, on a $\sum_{k=n_0}^{N} w_k = \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=n_0}^{N} f(k)$. Comme la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{N} w_k\right)_{N\geq n_0}$ converge vers ℓ, on en déduit que les suites $(\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t)_{N\geq n_0}$ et $\left(\sum_{k=n_0}^{N} f(k)\right)_{N\geq n_0}$ sont soit simultanément convergentes soit simultanément divergentes. □



Proposition 9 (séries de Riemann).

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

re-démonstration : on applique le théorème précédente à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est bien continue sur $]0,+\infty[$, positive, et décroissante lorsque $\alpha \geq 0$. □

III. Règle de d'Alembert, série exponentielle

III.1 Règle de d'Alembert

Proposition 10 (Règle de d'Alembert).

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes **tous non nuls**.

- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et si $\ell \in [0,1[$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\alpha_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\alpha_n$ est (grossièrement) divergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\alpha_n$ peut être convergente ou divergente.

démonstration :

- il existe un entier n_0, tel que : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \leq \dfrac{1+\ell}{2} = \gamma$, car par définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, $\left|\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - \ell\right| < \varepsilon$, à.p.c.r. n_0.
  Mais alors par récurrence immédiate, on obtient pour $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \leq \gamma^{n-n_0}|\alpha_{n_0}|$. par comparaison avec la série géométrique de raison $\gamma \in [0,1[$ convergente, on obtient que $\sum\limits_{n\geq n_0}|\alpha_n|$ converge.
- il existe un entier n_0, tel que : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \geq \dfrac{\ell+1}{2} = \gamma$, car par définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$, $\left|\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n - \ell|}\right| < \varepsilon$, à.p.c.r. n_0.
  Mais alors par récurrence immédiate, on obtient pour $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \geq \gamma^{n-n_0}|\alpha_{n_0}|$. par comparaison avec la série géométrique de raison $\gamma > 1$, on obtient que $\sum\limits_{n\geq n_0}|\alpha_n|$ diverge (grossièrement).

exemple 6. Attention, tout peut arriver dans le cas $\ell = 1$! ! !
La série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)}=1$.

III.2 Série exponentielle

2.a) Série exponentielle complexe

exemple 7. Pour tout nombre complexe $x\neq 0$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.

En effet, en posant $u_n=\frac{x^n}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, on a :
$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Définition 5 (Série exponentielle).

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la somme de la série absolument convergente $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est appelée **exponentielle de** z, et est notée $\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

Remarque 3. Plus tard, de tels développements en des puissances entières de z seront appelés “développements en série entière”.

2.b) Série exponentielle réelle, via la formule de Taylor

Rappel : $\boxed{\text{pour } f \text{ de classe } \mathcal{C}^{k+1}, \text{ on a } f(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(x-0)^j}{j!}f^{(j)}(0)+\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)\,\mathrm{d}u.}$

par exemple pour $f:x\mapsto e^x$, on a :
$e^x=\sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{j!}+r_k$ avec $r_k=\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}e^u\,\mathrm{d}u$

Comme $|r_k|\leq\left|e^{|x|}\int_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}\right|=e^{|x|}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, on obtient

Proposition 11 (exponentielle réelle).

$$\exp(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{j!}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=0}^{N}\frac{x^j}{j!}=e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

IV. Séries alternées

Proposition 12 (Critère spécial des séries alternées).

Supposons

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée (i.e. $((-1)^n u_n)$ a un signe constant) ;
2. la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$;

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **converge**.

En outre la suite (R_N) des restes est du signe de u_0, et $\forall N \in \mathbb{N},\ |R_N| \leq |u_{N+1}|$, où $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

démonstration : Dans le cas $u_0 \geq 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \geq 0$ et $u_{2n+1} \leq 0$.

On va montrer que les suites $(A_N) = (S_{2N})$ et $(B_N) = (S_{2N+1})$ vérifient les hypothèses du théorèmes des suites adjacentes, donc convergent vers une même limite finie.

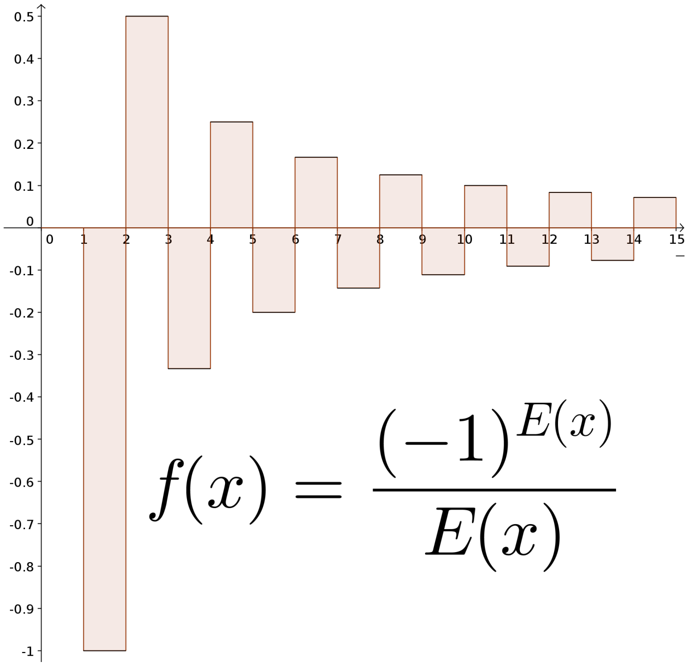
- Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $a_{N+1} - a_N = S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} + u_{2N+1} = |u_{2N+2}| - |u_{2N+1}| \underset{(|u_n|)\ decr.}{\leq} 0$, donc (a_N) est décroissante.
- Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $b_{N+1} - b_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = u_{2N+3} + u_{2N+2} = -|u_{2N+2}| + |u_{2N+1}| \underset{(|u_n|)\ decr.}{\geq} 0$, donc (b_N) est croissante.
- Pour $N \in \mathbb{N}$, $a_N - b_N = S_{2N} - S_{2N+1} = -u_{2N+1} \geq 0$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}, a_N \geq b_N$.
- on a $|a_N - b_N| = |u_{2N+1}| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Conclusion : d'après le théorème des suites adjacentes, (a_N) et (b_N) convergent vers une même limite ℓ, (et $\forall N \in \mathbb{N},\ a_N \geq \ell \geq b_N$).

Par ailleurs, $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+1} \leq \ell \leq S_{2N+2}$, donc $0 \leq \ell - S_{2N+1} \leq S_{2N+2} - S_{2N+1} = u_{2N+2}$, donc $|R_{2N+1}| \leq |u_{2N+2}|$
et $S_{2N} \geq \ell \geq S_{2N+1}$, donc $0 \geq \ell - S_{2N} \geq S_{2N+1} - S_{2N} = u_{2N+1}$, donc $|R_{2N}| \leq |u_{2N+1}|$.

Le cas $u_n \leq 0$ est analogue. $\square$.

Remarque 4. Lorsque ce critère s'applique, S_N fournit alors une valeur approchée de la somme S, à $|R_N|$ près


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
$f(x) = \dfrac{(-1)^{E(x)}}{E(x)}$

Préliminaires : constante d'Euler

Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{1}{t}$. Pour tout $n \geq 1$, on note $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n+1)$.

1. Comme $f(n)-f(n+1) \geq w_n \geq 0$, par comparaison avec la série télescopique convergente $\sum f(n)-f(n+1)$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$ converge, on note W sa somme.
2. Pour tout $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} w_k = \int_1^{N-1+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \ln(N) + 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
3. On en déduit que la suite $(g_N)_{N\geq 1}$ définie pour tout $N \geq 1$ par $g_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln N$ converge vers la limite notée $\gamma = 1 - W$. Cette limite est appelée « constante d'Euler ». Elle vaut environ $0,577...$

V. Formule de Stirling

Théorème 13 (Formule de Stirling).

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

démonstration (non exigible) :

$\ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, par continuité de $\ln$, il suffit donc de montrer que : $\ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 1$, c.-à-d. que :
$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right) + o(1)$, ou encore :

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1) \tag{1}$$

• Etape 1 : Pour $k \geq 1$, notons $v_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t - \ln(k+1)$.

Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k \underset{Chasles}{=} [x\ln x - x]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = n\ln n - n + 1 - \ln(n!)$, d'où :

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \tag{2}$$

• Etape 2 :
Pour tout $k \geq 1$ on calcule :
$v_k = \displaystyle\int_k^{k+1} 1.\ln(t)\mathrm{d}t - \ln(k+1) \underset{IPP, u(t)=t-k, v(t)=\ln(t)}{=} [(t-k)\ln(t)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \frac{t-k}{t}\mathrm{d}t - \ln(k+1)$ donc $v_k = -\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{t-k}{t}\mathrm{d}t$.
Puis $v_k \underset{IPP, u(t)=1/t, v(t)=(t-k)^2/2}{=} -\left[\dfrac{(t-k)^2}{2t}\right]_k^{k+1} + \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{-2t^2}\mathrm{d}t$, donc en posant $x_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{t^2}\mathrm{d}t$, on a :

$$v_k = \frac{-1}{2}\frac{1}{k+1} - \frac{x_k}{2} \tag{E_k}$$

Or pour $k \leq t \leq k+1$, $0 \leq \dfrac{(t-k)^2}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$, donc par comparaison de séries positives, la série $\sum_{k \geq 1} x_k$ converge, vers sa somme $\ell \in \mathbb{R}$,

ce que l'on peut écrire sous la forme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1) \quad (i)$

Par ailleurs, d'après le lemme, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad - \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \quad (ii)$

En sommant (E_k) pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} + x_k\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} x_k \quad (\star)$$

Donc $\displaystyle 1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\gamma + \ln n) + \frac{1}{2}\ell + o(1) \quad (iii)$

Finalement d'après $(\star)$ et (iii), en posant $K = \dfrac{1}{2}(1+\gamma+\ell)$, on obtient : $\displaystyle 1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n + K + o(1) \quad (iv)$

D'après (2) et (iv), on obtient : $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + o(1)$

Puis

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^K \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\star)$$

• Etape 3 : à l'aide des intégrales de Wallis, on montre que $e^K = \sqrt{2\pi}$, et de $(\star)$ on déduit la formule de Stirling. □

Intégrales de Wallis : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on montre que : $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ et $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
2. La formule $(\star)$ assure alors que : $I_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K} \quad (a)$
3. (a) On vérifie que la suite (I_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 1$, $I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$.
   (b) On a $I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$
   (c) On en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis que $I_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \quad (b)$.
4. En identifiant (a) et (b), on obtient $e^K = \sqrt{2\pi}$.

---

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

   Soit $n \geq 2$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}(1-\cos^2 x) \, \mathrm{d}x$

   $\displaystyle\underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\cos^2 x \, \mathrm{d}x = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\cos x \times \cos x \, \mathrm{d}x$

   $\displaystyle\underset{\text{I.P.P.}}{=} I_{n-2} - \left(\left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \times (-\sin x) \, \mathrm{d}x\right)$

   Donc : $\forall n \geq 2,\ I_n = I_{n-2} - \dfrac{1}{n-1} I_n$, ce qui fournit la **relation de récurrence** : $\quad \forall n \geq 2,\ I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (R)$.

On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_p$: « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ »

initialisation : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

hérédité : supposons $\mathcal{P}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$I_{2p+2} = \dfrac{2p+2-1}{2p+2} I_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}\ I_{2p} \underset{\mathcal{P}_p}{=} \dfrac{(2p+1)}{2(p+1)}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$= \dfrac{(2(p+1))!}{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, d'où $\mathcal{P}_{p+1}$.

On montre de même par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}_p$: « $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ »

initialisation : $I_1 = 1$.

hérédité : supposons $\mathcal{Q}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),

$I_{2p+3} = \dfrac{2p+3-1}{2p+3} I_{2p+1} \underset{\mathcal{Q}_p}{=} \dfrac{(2p+2)}{(2p+3)}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{[2(p+1)]^2}{(2p+3).\ (2p+2)}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$, d'où $\mathcal{Q}_{p+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}, \quad \text{et } I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$, d'après la formule $(\star)$: $I_{2p} \underset{1.}{=} \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}e^K}{2^{2p}(\sqrt{p}p^p e^{-p}e^K)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc

   $I_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K} \quad (b)$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $\sin(x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$.

   Par croissance de l'intégrale, on a donc $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1}\ \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\ \mathrm{d}x = I_n$

   donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$.

   Soit $n \geq 1$. On a en particulier $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. Comme $I_n \geq 0$, on en déduit que :

   $\boxed{\forall\ n \geq 1,\ I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}.}$

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n = 2p$, $I_n I_{n+1} = I_{2p}I_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(2p)}$.

   Pour $n = 2p+1$: $I_n I_{n+1} = I_{2p+1}I_{2p+2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}\dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} = \dfrac{(2p+2)\pi}{2^2(p+1)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.

   Donc $\boxed{I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}}$

   (c) D'après le 2b), $I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2n}(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. De même $I_{n-1}I_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi + o(1)}{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. L'encadrement précédent montre que la suite (nI_n^2) converge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $I_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$,

   d'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis $I_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2p}} \quad (b)$

4. De (a) et (b) on déduit que $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}e^K}$, donc $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{e^K}$. Conclusion $\boxed{e^K = \sqrt{2\pi}}$.

□

VI. Produits de Cauchy

Définition 6.

Etant données deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, leur **produit de Cauchy** est la série $\sum w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p,q\in\mathbb{N};\ p+q=n} u_p v_q$

Théorème 14 (produit de Cauchy).

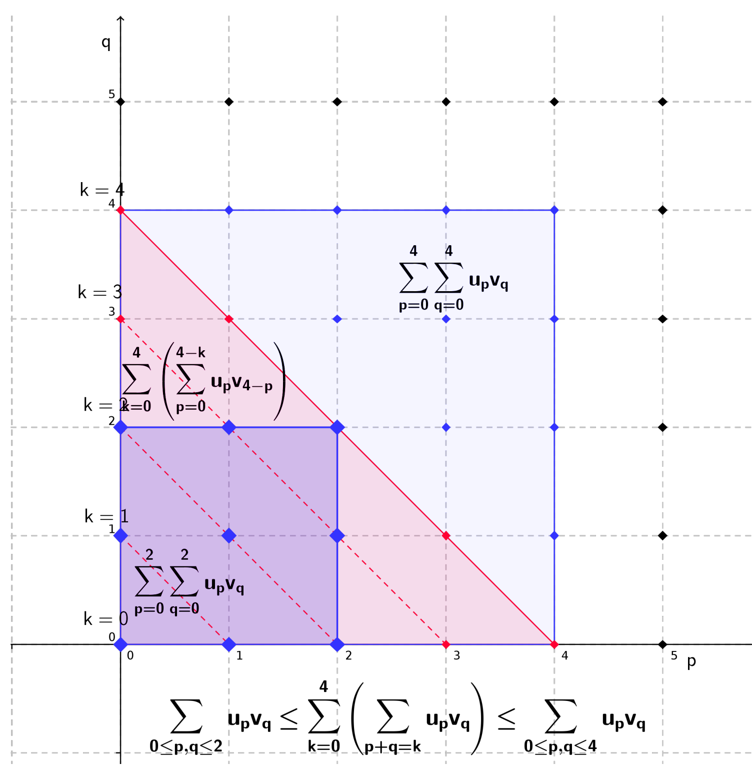
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ est aussi absolument convergent, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

démonstration : (non exigible)

• Dans le cas où les suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs, on note $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Pour N fixé : $\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \sum_{p=0}^{N}\left(u_p \sum_{n=p}^{N} v_{n-p}\right) \leq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{N-p} v_\ell\right) \leq \sum_{p=0}^{N} u_p \times \sum_{p=0}^{N} v_p$, le membre de droite tend vers UV, donc les sommes partielles de la série positive $\sum_k w_k$ et majorées donc convergent vers W, avec $W \leq UV$.

En outre, $\sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right) = \sum_{p=0}^{2N} u_p\left(\sum_{n=p}^{2N} v_{n-p}\right) = \sum_{p=0}^{2N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{2N-p} v_\ell\right) \geq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{2N-p} v_\ell\right) \geq \sum_{p=0}^{N} u_p\left(\sum_{\ell=0}^{N} v_\ell\right)$ donc à la limite $W \geq UV$. D'où $W = UV$.



- Cas général : montrons d'abord que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente.

Notons $A = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| = \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{n} |u_p||v_{n-p}| \right) = \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{n=p}^{N} |u_p||v_{n-p}| \right) = \sum_{p=0}^{N} \left(|u_p| \sum_{n=p}^{N} |v_{n-p}| \right) \leq \sum_{p=0}^{N} |u_p| B \leq AB.$$

Donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente, donc convergente, vers un nombre W.

En notant, pour $N \in \mathbb{N}$, $U_N = \sum_{p=0}^{N} u_p$, $V_N = \sum_{q=0}^{N} v_q$, et $W_N = \sum_{q=0}^{N} w_q$, on a :

$$|U_N V_N - W_N| = |\sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{N} u_p v_q \right) - \sum_{q=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{q} u_p v_{q-p} \right) | = |\sum_{p=0}^{N} u_p \left(\sum_{q=0}^{N} v_q \right) - \sum_{p=0}^{N} u_p \left(\sum_{q=p}^{N} v_{q-p} \right) |$$

$$= |\sum_{p=0}^{N} u_p \left(\sum_{q=0}^{N} v_q - \sum_{q=p}^{N} v_{q-p} \right) | = |\sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=N-p+1}^{N} v_q| \leq \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=N-p+1}^{N} |u_p||v_q|,$$

puis en "remontant" les calculs précédents en remplaçants les termes des suites par leurs valeurs absolues :

$$|U_N V_N - W_N| \leq \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{N} |u_p||v_q| \right) - \sum_{q=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{q} |u_p||v_{q-p}| \right) = \left(\sum_{p=0}^{N} |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^{N} |v_q| \right) - \sum_{q=0}^{N} |w_q|.$$

Le cas positif montre que le membre de droite tend vers 0, d'où l'existence de la limite : $\lim_{N\to+\infty} W_N = \lim_{N\to+\infty} U_N \times \lim_{N\to+\infty} V_N$ $\square$

exemple 8. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\exp(y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^m}{m!}$ sont les sommes de deux séries absolument convergentes. Leur produit de Cauchy est donc absolument convergent et la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{s} \frac{x^{s-m}}{(s-m)!} \frac{y^m}{m!} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!} \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} x^{s-m} y^m \underset{\text{binôme Newton}}{=} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^s}{s!}$$

On a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque 5. On verra au chapitre "séries entières" que :

Proposition 15 (exponentielle complexe).

$$\exp(x + \mathbf{i}y) = \exp(x)\exp(\mathbf{i}y) = \exp(x)(\cos(y) + \mathbf{i}\sin(y)) = \mathrm{e}^x\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}y},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\mathbf{i}y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}^n y^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}^{2p} y^{2p}}{(2p)!} + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}^{2q+1} y^{2q+1}}{(2q+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p y^{2p}}{(2p)!} + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}(-1)^q y^{2q+1}}{(2q+1)!} = \cos(y) + \mathbf{i}\sin(y)$$

Programme PC :

A - Séries numériques

Cette partie consolide et élargit les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.	
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
b) Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$	Démonstration non exigible.