Table des matières

Pré-requis

Objectifs

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge simplement** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

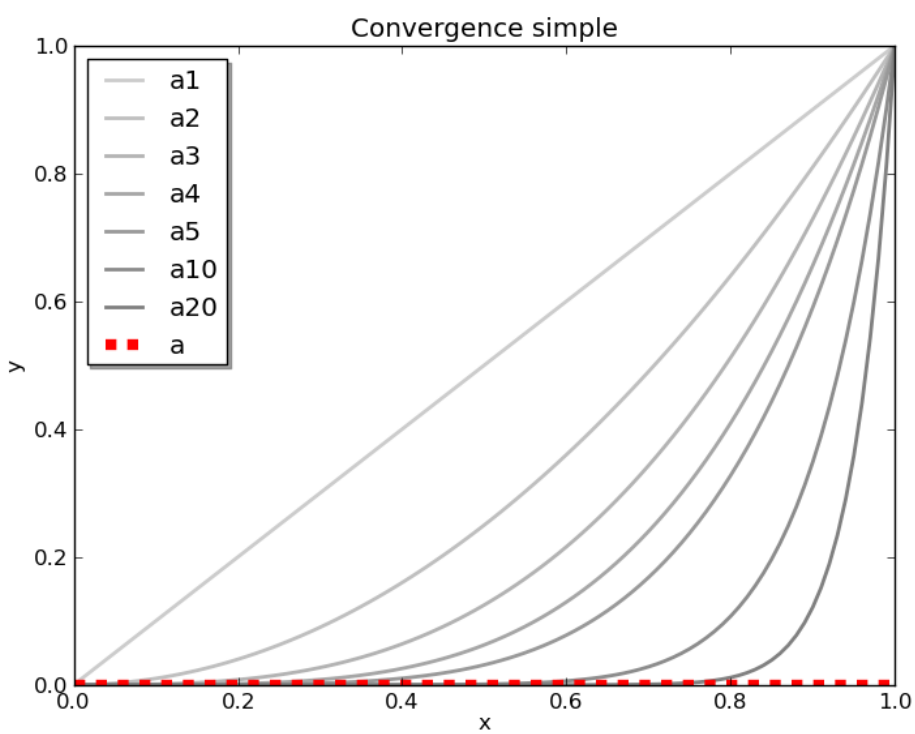
Remarque 1. En d'autres termes, (f_n) CVS sur I vers f si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ (\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence dépend du point x considéré!!!

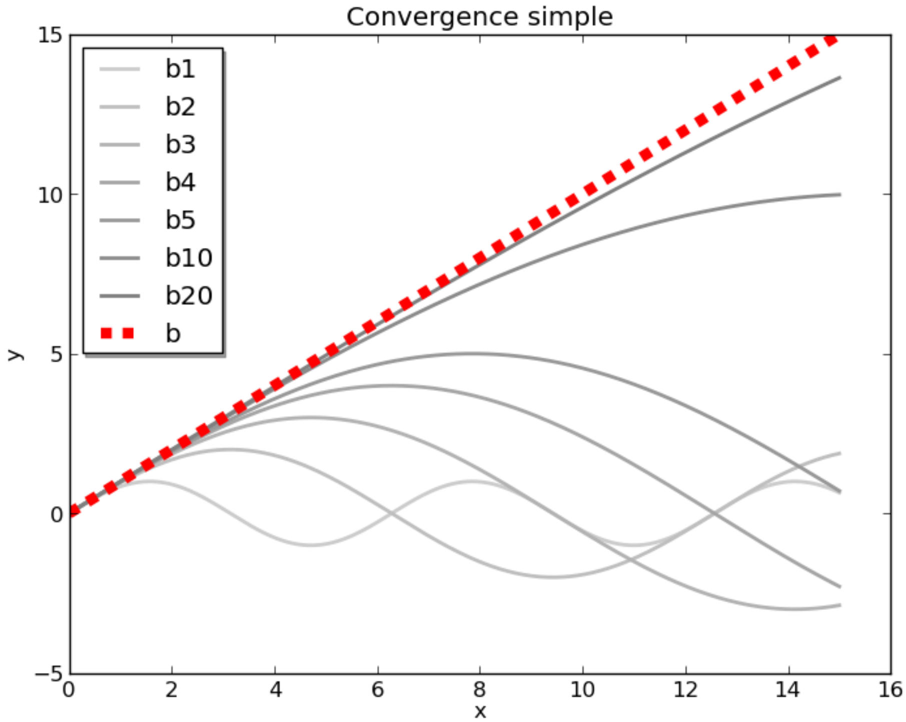
exemple 1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} a_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$

converge simplement sur $I = [0,1]$ vers la fonction $a : x \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$



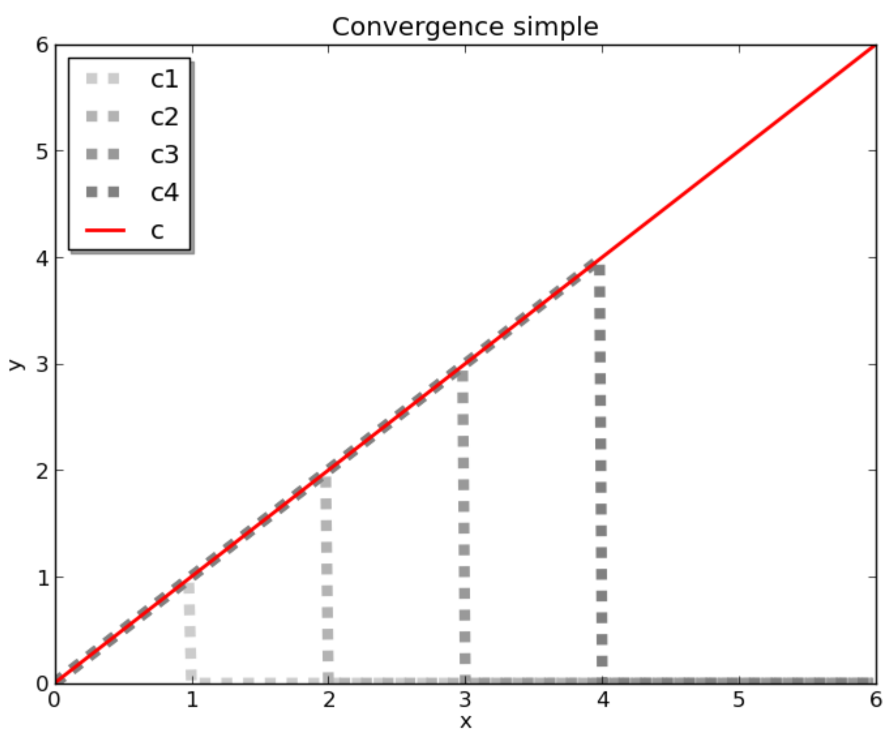
exemple 2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} b_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{array}$

converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers la fonction $b : x \longrightarrow x$.



exemple 3. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{array}$

converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers la fonction $c : x \longrightarrow x$.



Remarque 2. Attention, les propriétés de continuité, dérivabilité, etc... ne sont pas nécessairement conservées pour une limite simple !

Mais les inégalités larges étant conservées lors de passages à la limite, la positivité, les majorations par une borne indépendante de n ou la convexité restent vraies.

I.2 Convergence uniforme

Définition 2.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $f : I \to \mathbb{C}$) est bornée sur I s'il existe $K > 0$ tel que : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq K$.
Si tel est le cas, on note $\|f\|_{\infty,I} = \sup\{|f(t)|; t \in I\}$, valeur appelé normé infinie de F sur I.

Remarque 3. Rappel de PCSI : toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 4. $\|\ \|_{\infty,I}$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur I.

Définition 3.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions (bornées) de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque 5. En d'autres termes, (f_n) CVU sur I vers f si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; (\forall n \geq n_1,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

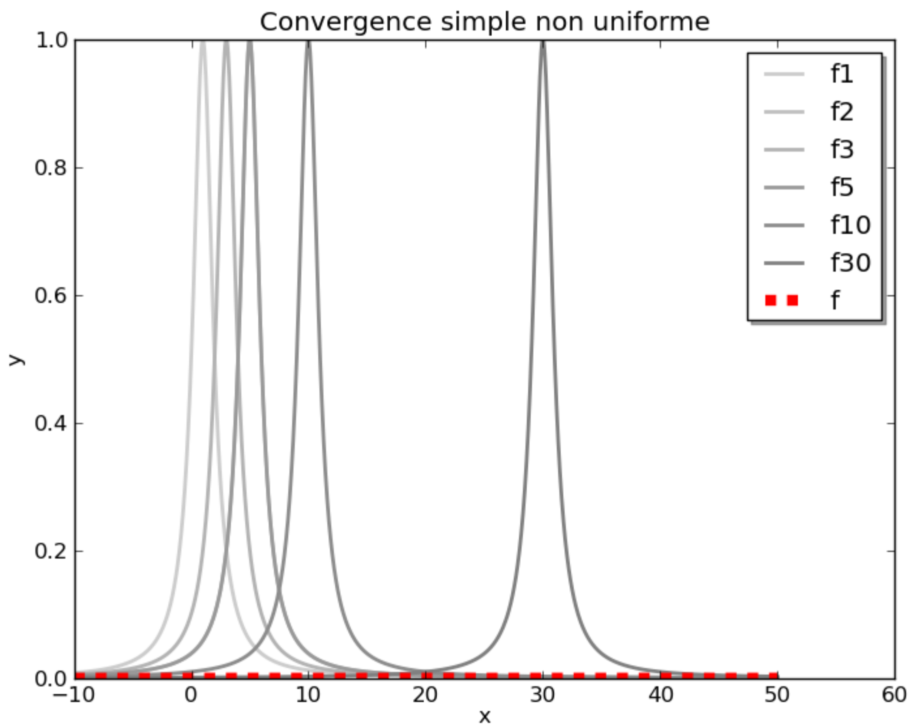
dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence ne dépend pas du point de I considéré !!!

Proposition 1.

Si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors (f_n) converge simplement sur I vers f.

démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, et $n_1(\varepsilon)$ associé, on pose, pour tout $x \in I$, $n_0 = n_0(x, \varepsilon) = n_1(\varepsilon)$, et on a bien :
$\forall x \in I,\ (\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$ $\square$

Remarque 6. ATTENTION : La réciproque est fausse : en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1 + (x - n)^2}$, la suite (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$, vers $f = \tilde{0}$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n - \tilde{0}\|_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(n) - 0| = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$



I.3 Pratique : calculs de normes infinies

méthode 1 : on étudie les variations de f_n, pour n fixé. Attention aux signes ! On obtient la valeur de $\|f_n\|_{\infty,I}$.

méthode 2 : pour tout $t \in I$ fixé et $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on majore $|f_n(t)| \leq K$ et on trouve une valeur t_0 pour laquelle l'égalité $K = |f(t_0)|$ est réalisée.

I.4 Pratique : domination d'une suite

méthode : pour tout $t \in I$ fixé, on majore $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ indépendamment de $n \in \mathbb{N}$.

II. Propriétés de la limite d'une suite

II.1 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

exemple 4. La limite d'une suite de fonctions continues peut ne pas être continue.

Par exemple, la suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement sur $I = [0,1]$ vers $f : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{array} \right.$, qui n'est pas continue.

Proposition 2.

Soient I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, qui converge uniformément sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est continue sur I.

démonstration : Soient $x_0 \in I$, et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,I} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

La fonction f_{n_0} étant continue en x_0, il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap I,\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Mais alors pour un tel η et $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap I$, on a :
$|f(x)-f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$
$|f(x)-f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leq\varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\leq\varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\leq\varepsilon/3}$

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0;\ \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap I,\ |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$, donc f est continue en x_0, pour tout $x_0 \in I$. □

Remarque 7. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, on obtient la continuité sur I.

II.2 Interversion limite-intégrale

2.a) En cas de convergence uniforme

Proposition 3.

Soient $I = [a,b]$ un segment, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.
Alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

démonstration :
$\left|\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}\ \mathrm{d}t$

Donc $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Le theorème des gendarmes permet de conclure sur l'existence et la valeur de la limite. □

2.b) Convergence dominée

Théorème 4 (de convergence dominée, admis).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

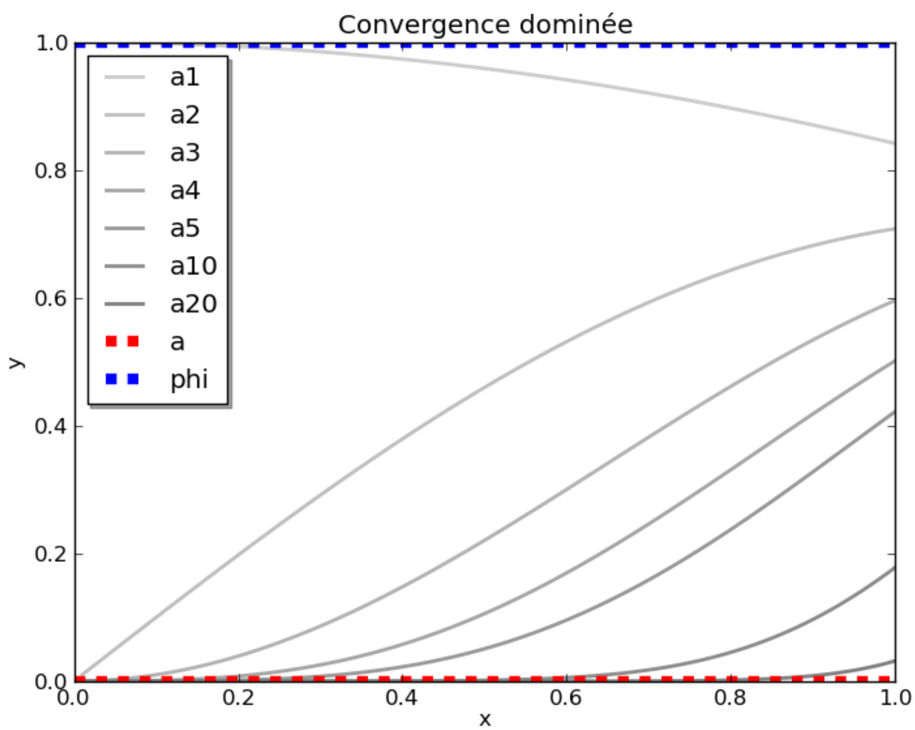
ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}$.

exemple 5. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rcl} a_n :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin^n t}{n} \end{array}$

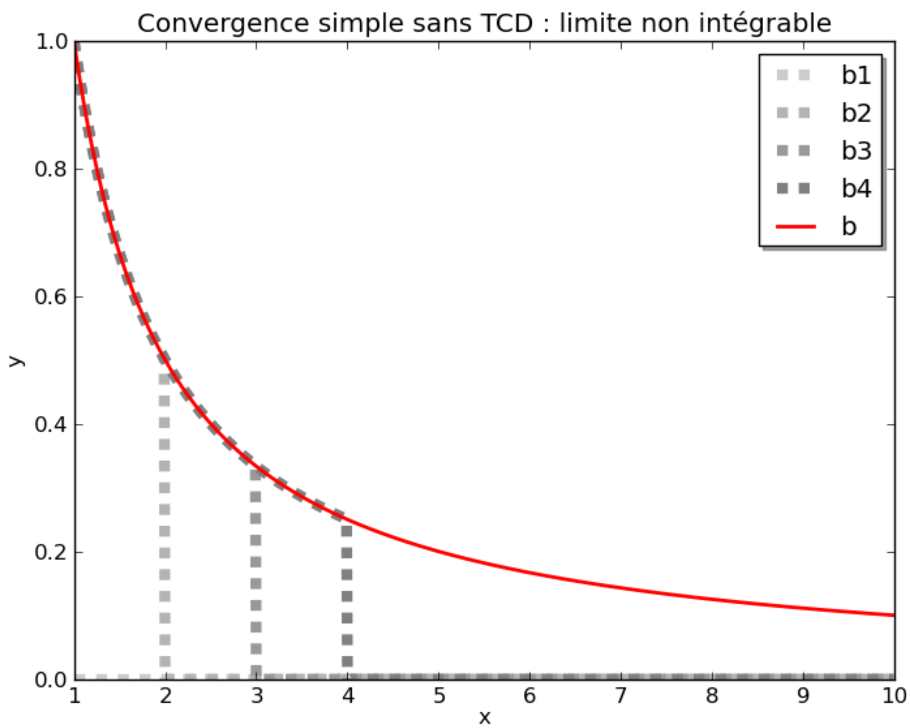
converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $a : x \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$



exemple 6. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rcl} b_n :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \leq n \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases} \end{array}$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $b : t \longrightarrow \dfrac{1}{t}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction inférieure à $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} b_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$



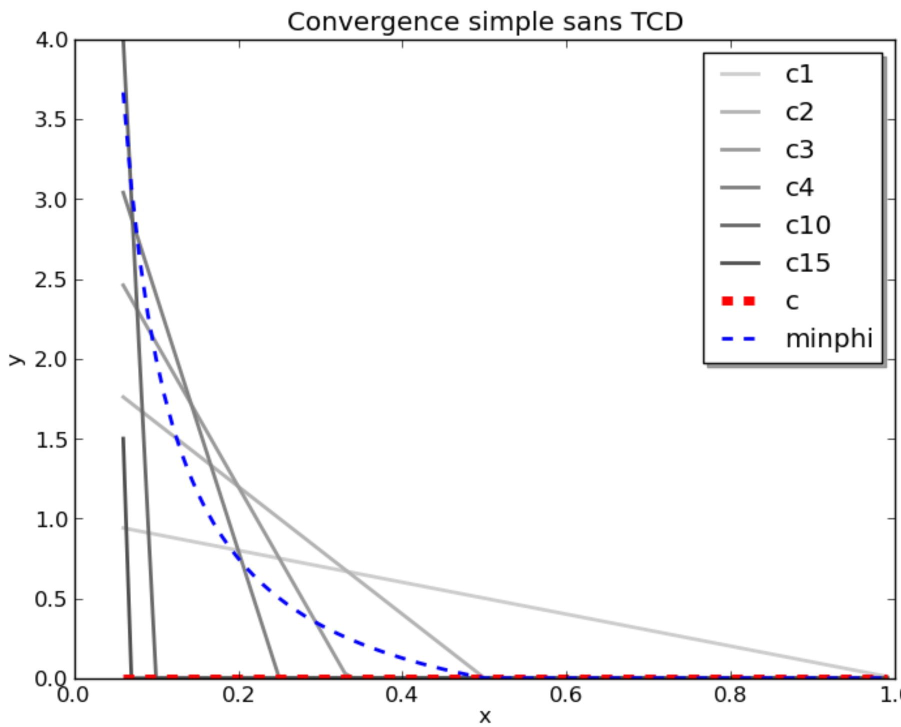
exemple 7. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$c_n : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} n(1-nx) \text{ si } x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > \dfrac{1}{n} \end{array} \right. \end{array}$$

converge simplement sur $I =]0,1]$ vers la fonction $c : t \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction intégrable φ, car on aurait : $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n(t)|$, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(1/(2n)) = n/2$, pour tout t tel que $E(1/t) = n$ on a :
$n \leq \dfrac{1}{t} \leq n+1$, et $\dfrac{1}{(n+1)} \leq t \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc $f_n(t/2) \geq f_n(1/(2(n+1))) = n(1-n/(2(n+1))) = n\dfrac{n+2}{2n+1} \geq \dfrac{n}{2} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)$

On obtient $\varphi(t/2) = \varphi_{\left|\left[\frac{1}{(n+1)}, \frac{1}{(n)}\right]\right.}(t/2) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)$, donc $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2t} - 1\right)$ donc φ n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 c_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $0 = \displaystyle\int_0^1 c(t)\ \mathrm{d}t$.



II.3 Dérivabilité

3.a) Suite de fonctions

Proposition 5.

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

démonstration :
Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$, pour $x, a \in I$, on a :

$$f(x) - f(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) - f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On applique le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n') : elle converge uniformément vers h sur le segment, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais alors $f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, donc f est la primitive de h qui vaut $f(a)$ en a, donc est $\mathcal{C}^1$ et est telle que $f' = h$.

Dans le cas I intervalle quelconque, on procède comme précédeement sur tout segment J de I, et on obtient la classe $\mathcal{C}^1$ et la formule de dérivation sur tout segment J de I, donc sur I.

Remarque 8. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, le résultat reste vrai.

Proposition 6.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, telle que les suites $(f_n^{(i)})$ CVS sur I vers $h_i \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $h_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f^{(i)} = h_i$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. $\square$

Programme PC :

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme :
si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :
soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :
soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme.

Contenus	Capacités & Commentaires

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.