

Table des matières

I. Suites de fonctions	2
I.1 Convergence simple	2
I.2 Normes	4
I.3 Rappels de PCSI : normes	4
I.4 Rappels de PCSI : produit scalaire	4
I.5 Rappels de PCSI : norme associée à un produit scalaire	5
I.6 Convergence uniforme	5
I.7 Pratique : calculs de normes infinies	7
I.8 Pratique : domination d'une suite	7
II. Propriétés de la limite d'une suite	7
II.1 Continuité de la limite d'une suite de fonctions	7
II.2 Interverson limite-intégrale	8
2.a) En cas de convergence uniforme	8
2.b) Convergence dominée	9
II.3 Dérivabilité	11
3.a) Suite de fonctions	11

Pré-requis

Notion de suites numériques. Régularité d'une fonction de la variable réelle.

Objectifs

Donner un sens à la notion de convergence d'une suite de fonctions : point par point (convergence simple) ou uniforme (pour la norme infinie). Cadre théorique pour échanger $\lim n \rightarrow +\infty$ avec la dérivation, l'intégration.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et on considère des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} .

I. Suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ **converge simplement** sur I vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

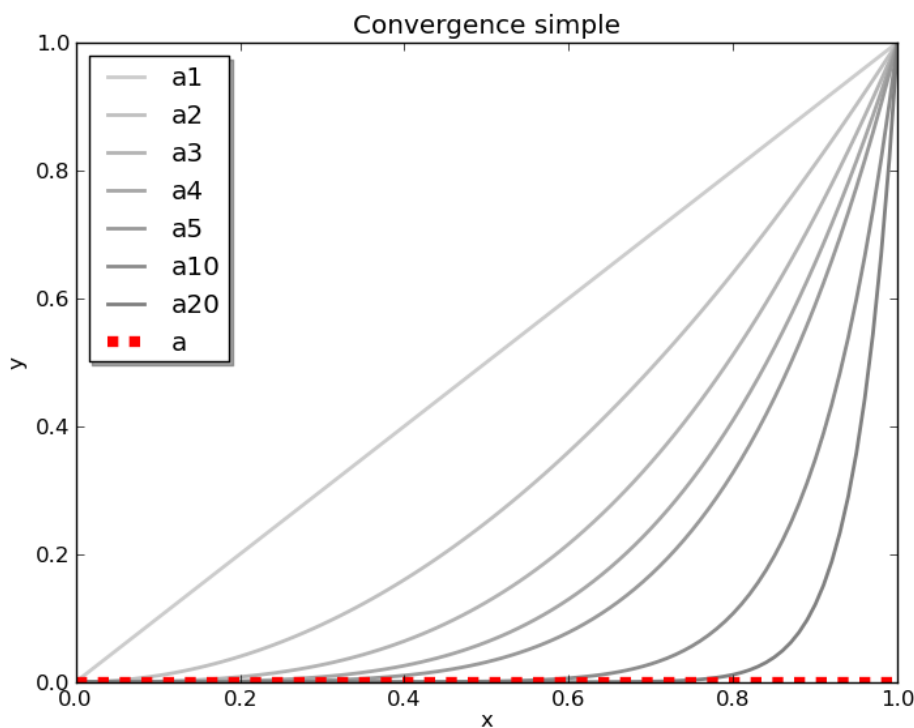
Remarque 1. En d'autres termes, (f_n) CVS sur I vers f si et seulement si :

$$\forall x \in I, (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

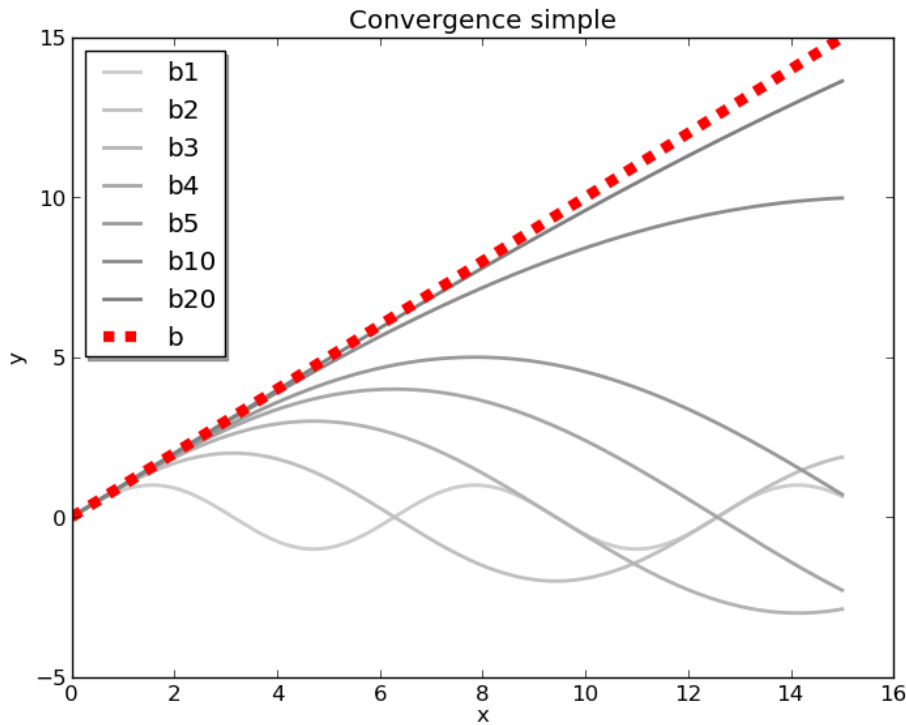
dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence dépend du point x considéré!!!

exemple 1. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers la fonction $a : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



exemple 2. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$
 converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers la fonction $b : x \rightarrow x$.

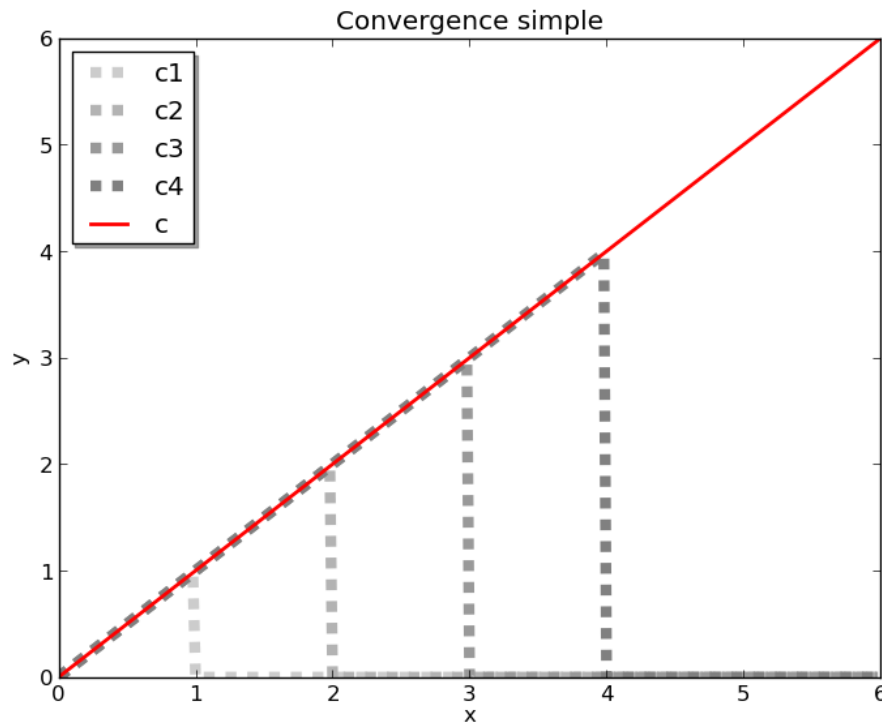


exemple 3. La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$c_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers la fonction $c : x \longrightarrow x$.



Remarque 2. Attention, les propriétés de continuité, dérivabilité, etc... ne sont pas nécessairement conservées pour une limite simple !

Mais les inégalités larges étant conservées lors de passages à la limite, la positivité, les majorations par une borne indépendante de n ou la convexité restent vraies.

I.2 Normes

2.a) Rappels de PCSI : normes

Définition 2.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **norme** si :

- i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité) ;
- ii) $\forall x \in E, [\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E]$ (séparation) ;
- iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;
- iv) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

2.b) Rappels de PCSI : produit scalaire

Définition 3.

Une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **bilinéaire** si

$\forall y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x; y + \lambda z \rangle = \langle x; y \rangle + \lambda \langle x; z \rangle$ et $\langle x + \lambda y; z \rangle = \langle x; z \rangle + \lambda \langle y; z \rangle$

Définition 4 (Produit scalaire).

L'application $\langle \bullet; \bullet \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

- i) $\langle \bullet; \bullet \rangle$ est **symétrique**
(i.e. $\forall v, w \in E, \langle w; v \rangle = \langle v; w \rangle$) ;
- ii) $\langle \bullet; \bullet \rangle$ est **bilinéaire**
- iii) $\langle \bullet; \bullet \rangle$ est **positive** (i.e. $\forall v \in E, \langle v; v \rangle \geq 0$) ;
- iv) $\langle \bullet; \bullet \rangle$ est **définie** (i.e. $\forall v \in E, (\langle v; v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_E)$) ;

exemple 4. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$\langle x; y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ produit scalaire euclidien canonique (p.s. usuel)}$$

exemple 5. Pour $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on pose :

$$\langle f; g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \text{ produit scalaire sur } E.$$

2.c) Rappels de PCSI : norme associée à un produit scalaire

Définition 5.

Si $\langle \bullet; \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\| \cdot \| : x \mapsto \sqrt{\langle x; x \rangle}$ est la **norme associée**

Proposition 1 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $\langle ; \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

- i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité);
- ii) $\forall x \in E, [\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E]$ (séparation);
- iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité);
- iv) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);

démonstration : la positivité et le caractère séparé de la norme découlent directement de la positivité et du caractère défini du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité. Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. \square

Proposition 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $\langle \bullet; \bullet \rangle$. Alors $\forall (u, v) \in E^2, |\langle u; v \rangle| \leq \sqrt{\langle u; u \rangle} \sqrt{\langle v; v \rangle}$
 en particulier, si $\| \cdot \| : x \mapsto \sqrt{\langle x; x \rangle}$, on a : $\forall (u, v) \in E^2, |\langle u; v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
 En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :

Soient $x, y \in E$ fixés. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle x + ty; x + ty \rangle$.

a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\forall t, f(t) = \langle x; x \rangle + \langle ty; x \rangle + \langle x; ty \rangle + \langle ty; ty \rangle = \langle x; x \rangle + 2 \langle x; y \rangle t + \langle y; y \rangle t^2.$$

b) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est positive, donc pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$.

c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur \mathbb{R}).

$$\Delta \leq 0 \iff [2 \langle x; y \rangle]^2 - 4 \langle y; y \rangle \langle x; x \rangle \leq 0 \iff 4 \langle x; y \rangle^2 \leq 4 \langle y; y \rangle \langle x; x \rangle$$

$$\iff |\langle x; y \rangle| \leq \sqrt{\langle y; y \rangle} \sqrt{\langle x; x \rangle}, \text{ car la racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+. \square$$

I.3 Convergence uniforme

Définition 6.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : I \rightarrow \mathbb{C}$) est bornée sur I s'il existe $K > 0$ tel que : $\forall t \in I, |f(t)| \leq K$.

Si tel est le cas, on note $\|f\|_{\infty, I} = \sup\{|f(t)|; t \in I\}$, valeur appelé normé infinie de F sur I .

Remarque 3. Rappel de PCSI : toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 4. $\|\cdot\|_{\infty, I}$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur I .

Définition 7.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions (bornées) de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ converge **uniformément** sur I vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\sup_{t \in I} \{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque 5. En d'autres termes, (f_n) CVU sur I vers f si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; (\forall n \geq n_1, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

dans cette notion de convergence, la vitesse de convergence ne dépend pas du point de I considéré!!!

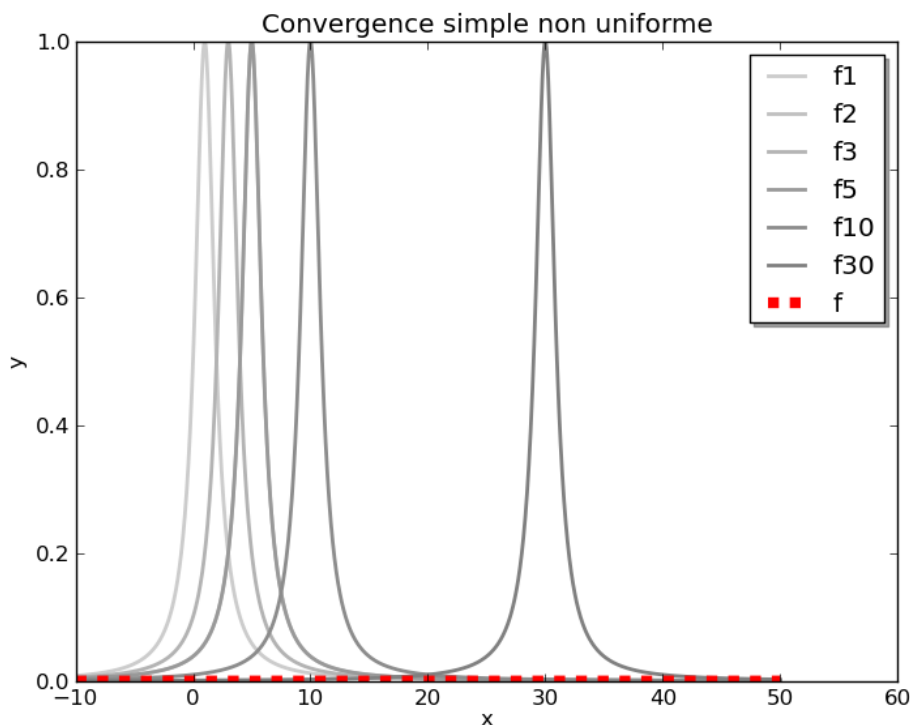
Proposition 3.

Si (f_n) converge uniformément sur I vers f , alors (f_n) converge simplement sur I vers f .

démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, et $n_1(\varepsilon)$ associé, on pose, pour tout $x \in I$, $n_0 = n_0(x, \varepsilon) = n_1(\varepsilon)$, et on a bien :

$$\forall x \in I, (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \square$$

Remarque 6. ATTENTION : La réciproque est fautive : en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + (x - n)^2}$, la suite (f_n) CVS sur \mathbb{R} , vers $f = \tilde{0}$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n - \tilde{0}\|_{\infty, \mathbb{R}} = |f_n(n) - 0| = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$



I.4 Pratique : calculs de normes infinies

méthode 1 : on étudie les variations de f_n , pour n fixé. Attention aux signes ! On obtient la valeur de $\|f_n\|_{\infty, I}$.

méthode 2 : pour tout $t \in I$ fixé et $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on majore $|f_n(t)| \leq K$ et on trouve une valeur t_0 pour laquelle l'égalité $K = |f(t_0)|$ est réalisée.

I.5 Pratique : domination d'une suite

méthode : pour tout $t \in I$ fixé, on majore $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ indépendamment de $n \in \mathbb{N}$.

II. Propriétés de la limite d'une suite

II.1 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

exemple 6. La limite d'une suite de fonctions continues peut ne pas être continue.

Par exemple, la suite (f_n) de fonctions continues sur $[0, 1]$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, qui n'est pas continue.

Proposition 4.

Soient I un intervalle réel, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I , qui converge uniformément sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Alors f est continue sur I .

démonstration : Soient $x_0 \in I$, et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

La fonction f_{n_0} étant continue en x_0 , il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Mais alors pour un tel η et $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ |f(x) - f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \varepsilon/3} \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, donc f est continue en x_0 , pour tout $x_0 \in I$. \square

Remarque 7. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I , on obtient la continuité sur I .

II.2 Intervern limite-intégrale

2.a) En cas de convergence uniforme

Proposition 5.

Soient $I = [a, b]$ un segment, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$ converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t) dt$$

démonstration :

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} dt$$

$$\text{Donc } \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure sur l'existence et la valeur de la limite. \square

2.b) Convergence dominée

Théorème 6 (de convergence dominée, admis).

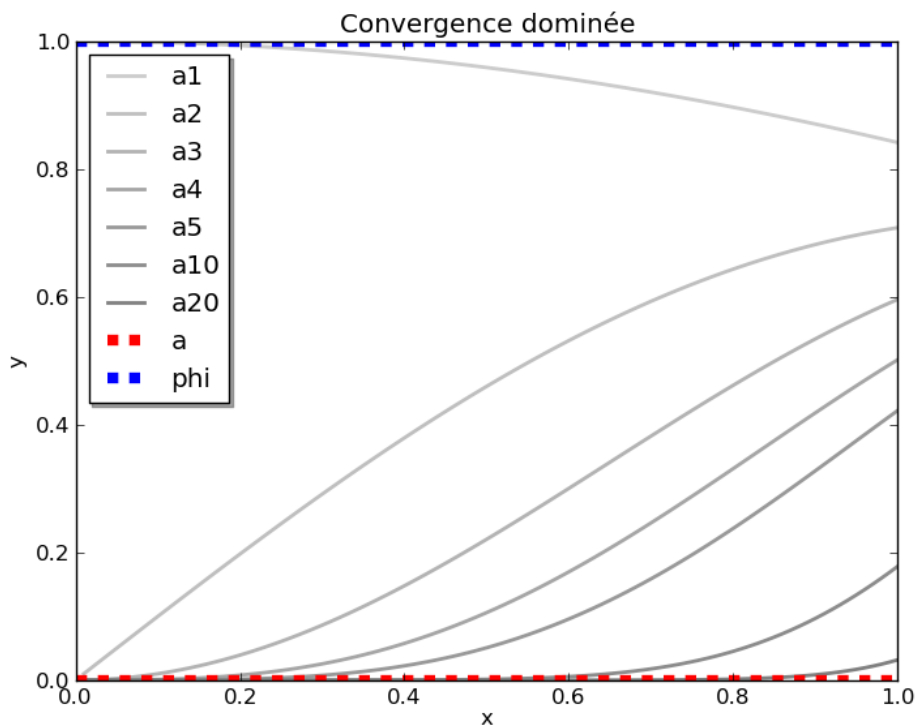
Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- ii) la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable telle que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions f_n , pour $n \in \mathbb{N}$, et f sont intégrables sur I , la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n \geq 0}$ converge, et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

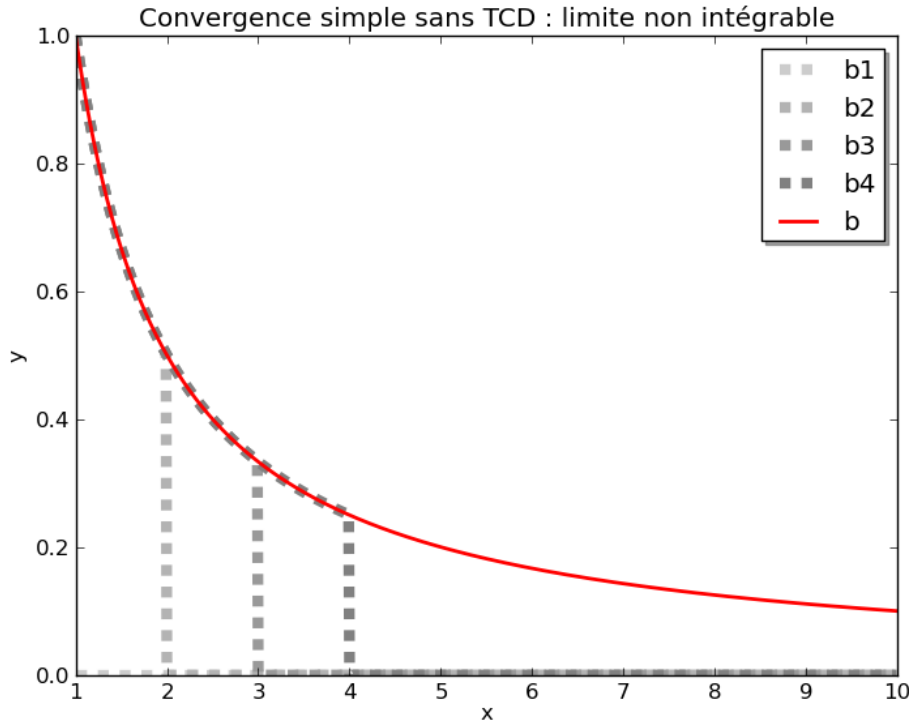
exemple 7. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin^n x}{n}$
 converge simplement sur $I =]0, 1]$ vers la fonction $a : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



exemple 8. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

converge simplement sur $I =]0, 1]$ vers la fonction $b : t \rightarrow \frac{1}{t}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction inférieure à $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable : le TCD ne s'applique pas, et $\int_1^{+\infty} b_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$



exemple 9. La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$c_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} n(1 - nx) & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

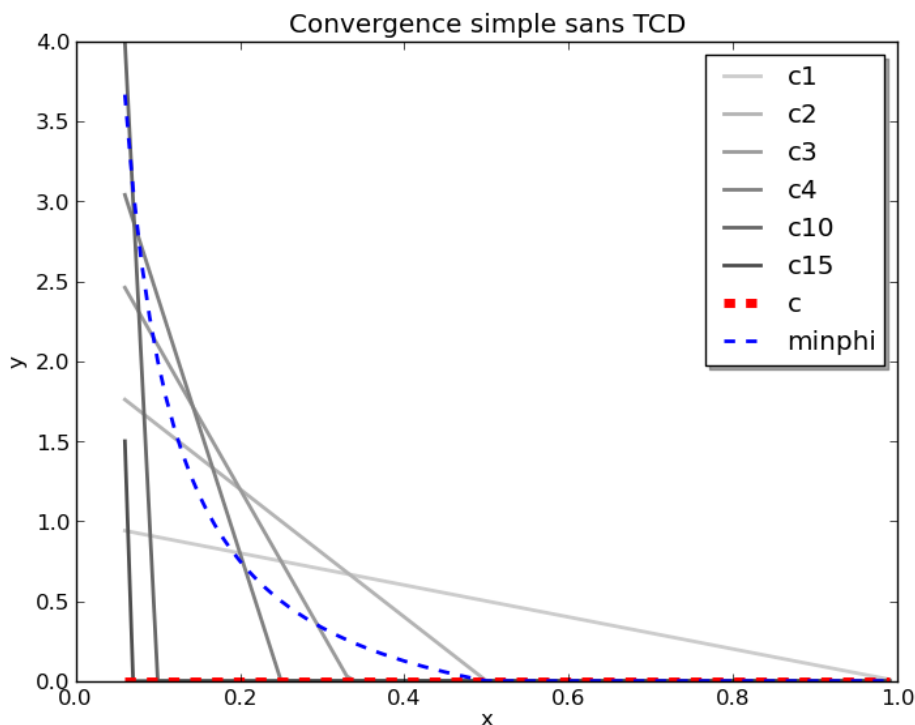
converge simplement sur $I =]0, 1]$ vers la fonction $c : t \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$,

mais on ne peut pas dominer par une fonction intégrable φ , car on aurait : $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |c_n(t)|$, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(1/(2n)) = n/2$, pour tout t tel que $E(1/t) = n$ on a : $n \leq \frac{1}{t} \leq n + 1$, et $\frac{1}{(n + 1)} \leq t \leq \frac{1}{n}$.

Donc $f_n(t/2) \geq f_n(1/(2(n + 1))) = n(1 - n/(2(n + 1))) = n \frac{n + 2}{2n + 1} \geq \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)$

On obtient $\varphi(t/2) = \varphi \left[\left[\frac{1}{(n + 1)}, \frac{1}{n} \right] \right] (t/2) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)$, donc $\varphi(t) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2t} - 1 \right)$ donc φ n'est pas intégrable :

le TCD ne s'applique pas, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 c_n(t) dt = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $0 = \int_0^1 c(t) dt$.



II.3 Dérivabilité

3.a) Suite de fonctions

Proposition 7.

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I , qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, et telle que la suite (f'_n) de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Alors f est de de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $f' = h$.

démonstration :

Dans le cas où I est un segment de \mathbb{R} , pour $x, a \in I$, on a :

$$f(x) - f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) - f_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt.$$

On applique le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f'_n) : elle converge uniformément vers h sur le segment, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x h(t) dt$.

Mais alors $f(x) - f(a) = \int_a^x h(t) dt$, donc f est la primitive de h qui vaut $f(a)$ en a , donc est \mathcal{C}^1 et est telle que $f' = h$.

Dans le cas I intervalle quelconque, on procède comme précédemment sur tout segment J de I , et on obtient la classe \mathcal{C}^1 et la formule de dérivation sur tout segment J de I , donc sur I .

Remarque 8. S'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I , le résultat reste vrai.

Proposition 8.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I , qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, telle que les suites $(f_n^{(i)})$ CVS sur I vers $h_i \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ pour $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $h_k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Alors f est de de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $f^{(i)} = h_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

démonstration : par récurrence sur $k \geq 1$. \square

Programme PC :

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.

La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n , $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Interversion limite-intégrale :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

si (f_n) est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers h , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = h$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

CONTENUS

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère \mathcal{C}^k de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k - 1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I .

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme :

si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :

soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I . Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série

$\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de

classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère \mathcal{C}^k de la somme.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème d'intégration terme à terme :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.