Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Topologie d'une partie

I.1 Point intérieur, partie ouverte

Définition 1.

Soit Δ une partie de E. Un point $A \in \Delta$ est dit **point intérieur** de Δ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$.

Définition 2.

Soit Δ une partie de E.
On appelle **intérieur** de Δ l'ensemble Δ° constitué des points intérieurs à Δ.

Définition 3.

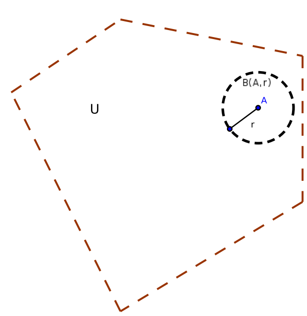
Une partie U de E est dite **ouverte** (on dit encore que U est un ouvert de E) si :

$$\forall a \in U,\ \exists r > 0, B(a, r) \subset U$$

i.e. : autour de chaque point a de A on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans A et contenant a

Remarque 1. Une partie est ouverte si elle n'est constituée que de points intérieurs.

exemples : E et $\emptyset$ sont des ouverts



Proposition 1.

Une boule ouverte est un ouvert.

<u>*démonstration :*</u> Le cas d'une boule ouverte de rayon 0 est trivial.
Soit $(x, R) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B(x, R)$ est un ouvert de E.

Soit $a \in B(x,R)$, et soit $\rho = d(a,x) = \|x-a\|$. On a $\rho < R$, donc pour tout y appartenant à $B\left(a, \dfrac{R-\rho}{2}\right)$, on a :
$\|x-y\| \leq \|x-a\| + \|a-y\| = \rho + d(a,y) \leq \rho + \dfrac{R-\rho}{2} = \dfrac{R+\rho}{2} < R$, donc $y \in B(x,R)$.

Ainsi, $a \in B\left(a, \dfrac{R-\rho}{2}\right) \subset B(x,R)$. $\square$

application : dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, tout demi-plan ouvert est un ouvert.
(ce serait vrai pour toute autre norme, elles sont toutes équivalentes car on est en dimension finie)

exemple 1. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, les intervalles ouverts sont des ouverts.

exemple 2. tout demi-plan (dit ouvert, car défini par une inégalité stricte) $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$:
Soit $a = (x,y) \in \mathcal{P}$. Notons $r = |y|/2 > 0$. Pour tout $p = (u,v) \in B(a,r)$, on a $|y-v| \leq \sqrt{(a-u)^2 + (y-v)^2} < r$, donc : $y - v \leq |y-v| \leq |y|/2$, donc $v > |y|/2$, donc $p \in \mathcal{P}$. Ainsi, $a \in B(a,r) \subset \mathcal{P}$.

Proposition 2.

Une réunion finie ou dénombrable d'ouverts est un ouverts.

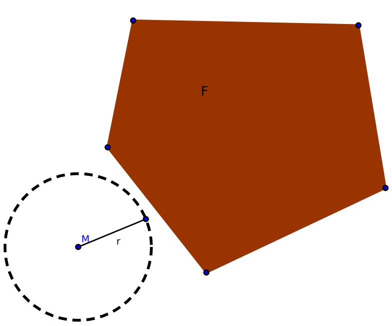
Une intersection FINIE d'ouverts est un ouvert
(ce peut être faux pour une intersection infinie !).

I.2 Partie fermée

Définition 4.

Une partie F de E est dite **fermée** (on dit encore que F est un fermé de E) si son complémentaire dans E est ouvert.
i.e. : F fermé ssi $\complement F = E \setminus F = \{x \in E; x \notin F\}$ est ouvert.
i.e. : autour de chaque point a de $\complement F$ on peut trouver une boule ouverte non vide incluse dans $\complement F$ et contenant a

exemple 3. E et $\emptyset$ sont des fermés
$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$
Toute boule fermée est un fermé.



Proposition 3.

Une intersection finie ou dénombrable de fermés est un fermé.

Une réunion FINIE de fermés est un fermé
(ce peut être faux pour une réunion infinie !).

I.3 Continuité et boules ouvertes

Cadre : E (resp. F) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\| \; \|_E$ (resp. $\| \; \|_F$).
Soit A une partie de E, a un point adhérent à A.

Proposition 4.

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est **continue**, alors les ensembles $\{X \in E;\; f(X) > 0\}$ et $\{X \in E;\; f(X) < 0\}$ sont des ouverts.

démonstration : Soit $A \in U = \{X \in E;\; f(X) > 0\}$. Par continuité de f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall X,\; \|X - A\| \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$$

.

En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{|f(A)|}{2}$, et η associé, on a pour tout X tel que $\|X - A\| < \eta$:

$|f(X) - f(A)| \leq \dfrac{|f(X)|}{2}$, donc $f(X) - f(A) \geq -\dfrac{|f(A)|}{2}$, d'où $f(X) \geq \dfrac{|f(A)|}{2} > 0$, donc $X \in A$.
Ainsi $B(A, \eta) \subset A$. $\square$

exemple 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; x^2 + ye^x > 3\}$ est un ouvert.

Remarque 2. ce serait faux pour les images directes. $f : x \mapsto 1$, $f(\mathbb{R}) = \{1\}$ est un fermé.

Remarque 3. Ce résultat est très pratique pour justifier qu'un ensemble (défini par une « formule »continue) est un ouvert ou un fermé .

I.4 Continuité et fermés

Proposition 5.

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est **continue**, alors les ensembles $\{X \in E;\; f(X) = 0\}$ et $\{X \in E;\; f(X) \geq 0\}$ sont fermés.

exemple 5. $B_f(0, 1)$ est un fermé borné de E

Théorème 6 ((non exigible)).

Soient E e.v.n. de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si K est un fermé borné de E, alors f est bornée sur K et y atteint ses bornes : Il existe $x_0, x_0' \in K$ tels que

i) $f(x_0) = \inf\{f(x);\ x \in K\} = \min\{f(x);\ x \in K\}$

ii) $f(x_0') = \sup\{f(x);\ x \in K\} = \max\{f(x);\ x \in K\}$

i.e. : **Toute fonction à valeurs réelles continue sur un fermé borné** de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ **y est bornée et y atteint ses bornes**

idée démonstration : Via le théorème de Bolzano-Weierstrass : On extrait d'une suite (x_n) telle que $f(x_n) \to M$ une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, et on conclut par continuité. □

□

exemple 6. $(x, y) \mapsto \cos(2\pi x - 2\pi y) + \exp(\sin(\pi x))$ est continue sur le compact $[0, 2] \times [0, 1]$, donc y est bornée et atteint ses bornes. On peut en déduire (périodicité) qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

I.5 Adhérence, Frontière d'une partie

Définition 5.

Soit Δ une partie de E. Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Remarque 4. Une partie est fermée si elle n'est constituée que de points adhérents.

Définition 6.

Soit Δ une partie de E.
On appelle **adhérence** de Δ l'ensemble $\overline{\Delta}$ constitué des points adhérents à Δ.
On appelle **frontière** de Δ l'ensemble $\partial\Delta$ constitué des points adhérents non intérieurs à Δ.

Remarque 5. $\Delta^\circ \subset \Delta \subset \overline{\Delta}$

Proposition 7.

Si (X_n) est une suite de Δ qui converge vers X, alors $X \in \overline{\Delta}$.
En particulier toute limite de suite de points d'un fermé appartient à ce fermé.

II. Parties convexes

II.1 Définition

Définition 7.

Une partie C de E est dite convexe si $\forall A, B \in C,\ \forall t \in [0,1],\ t(A) + (1-t)B \in C$

Remarque 6. C est convexe si tous les segments $[A, B]$ obtenus en joignant des points de C sont inclus dans C.

II.2 Boules

Proposition 8.

Toute boule ouverte est convexe.
Toute boule fermée est convexe.

III. Complément H.P. : Comparaison de normes en dimension finie

Définition 8.

Deux normes N et $\tilde{N}$ sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists A, B > 0;\ \forall x \in E,\ A\ \tilde{N}(x) \leq N(x) \leq B\ \tilde{N}(x)$$

exemple 7. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Théorème 9 (Admis)**.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** n.
Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur E, alors elles sont équivalentes.

IV. Applications lipschitziennes. Continuité des applications linéaires ou bilinéaires en dimension finie.

Cadre : E e.v.n. muni de la norme $\| \quad \|_E$, F e.v.n. muni de la norme $\| \quad \|_F$

IV.1 Applications lipschitziennes (rappel)

Définition 9.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite k**-lipschitzienne** si : $\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

i.e. : les images « s'éloignent »au plus d'un facteur k.

Définition 10.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k telle qu'elle soit k-lipschitzienne

exemple 8. l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{Arctan} x$, est 1-lipschitzienne, car :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\ \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left\{\dfrac{1}{1+t^2}\right\} |y - x|$, d'après l'inégalité des accroissements finis.

exemple 9. l'application $\| \quad \|_E : E \to \mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne, car $\forall x, y \in E,\ |\|y\|_E - \|x\|_E| \leq \|y - x\|_E$

Théorème 10.

Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E.

démonstration :
Soit $a \in E$ fixé, montrons que f est continue en a. Soit $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Le cas $k = 0$ est trivial. supposons $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on a alors :

$$\forall x \in E, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\eta = \varepsilon$$

Ce qui montre la continuité de f en a $\square$.

Remarque 7. La somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
La composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

IV.2 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Théorème 11.

Soient $(E, \| \quad \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimension finie** et $(F, \| \quad \|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est lipschitzienne.
Toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E.

démonstration :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Posons $N : E \to \mathbb{R}^+,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est la décomposition de x dans la base $\mathcal{B}$. On vérifie que N est une norme sur E, donc (dimension finie) équivalente à $\| \quad \|_E$. En particulier, il existe $K > 0$ tel que $N(\cdot) \leq K \| \cdot \|_E$.

Pour tous x, y dans E, on a, par linéarité de u, et par inégalité triangulaire : $\|u(x) - u(y)\|_F = \| \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) u(e_i) \|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|u(e_i)\|_F$.

En notant $m = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|_F$, on a donc : $\forall x, y \in E,\ \|u(x) - u(y)\|_F \leq mN(x - y) \leq mK\|xy\|_E$, donc u est mK-lipschitzienne. Donc u est continue sur E. $\square$.

Remarque 8. Conséquence : pour $(E, \| \quad \|_E)$ e.v.n. de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\{x \in E;\ \|x\|_E \leq 1\},\ F)$ l'ensemble des applications bornées sur la boule unité de E $\mathcal{B}(\{x \in E;\ \|x\|_E \leq 1\},\ F)$.
$||| \quad ||| : f \mapsto \sup\{\|f(x)\|_F; x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

IV.3 Continuité des applications multilinéaires

Définition 11.

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $\beta : E \times F \to G$ est dite bilinéaire si : $\forall (x, x', y, y', \lambda) \in E \times E \times F \times F \times \mathbb{K}, \beta(\lambda x + x', y) = \lambda\beta(x', y) + \beta(x', y)$ et $\beta(x, \lambda y + y') = \lambda\beta(x, y) + \beta(x, y')$

Notation : notons $\mathcal{B}il(E \times F, G)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ vers G.

lemme 12. *Soit $\beta \in \mathcal{B}il(E \times F, G)$. Il existe $k \geq 0$ tel que : $\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|\beta(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$*

démonstration :
Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_s)$ une base de F.

Posons $N_E : E \to \mathbb{R}^+,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est la décomposition de x dans la base $\mathcal{E}$. On vérifie que N_E est une norme sur E, donc (dimension finie) équivalente à $\| \quad \|_E$. En particulier, il existe $K_E > 0$ tel que $N_E(\cdot) \leq K_E\| \cdot \|_E$.

Posons $N_F : F \to \mathbb{R}^+,\ y = \sum_{i=1}^{s} y_i f_i \longmapsto \max_{1 \leq i \leq s} |y_i|$, où $y = \sum_{j=1}^{s} y_j f_j$ est la décomposition de y dans la base $\mathcal{F}$. On vérifie que N_F est une norme sur F, donc (dimension finie) équivalente à $\| \quad \|_F$. En particulier, il existe $K_F > 0$ tel que $N_F(\cdot) \leq K_F\| \cdot \|_F$.

Posons $R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} \|\beta(e_i, f_j)\|_G$ Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{s} y_j f_j \in F$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\beta(x,y)\|_G &= \|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} x_i y_j \beta(e_i, f_j)\|_G \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} |x_i||y_j|\|\beta(e_i, f_j)\|_G \\
&\leq N_E(x)N_F(y)R \\
&\leq RK_EK_F\|x\|_E\|y\|_F.
\end{aligned}$$

Donc $k = RK_EK_F$ convient. $\square$.

Théorème 13.

Soient $(E, \| \quad \|_E)$, des $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimensions finies** et $(F, \| \quad \|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Toute application n-linéaire en dimension finie est continue sur E^n.

démonstration : Cas $n = 2$: OK car Lipschitzien, car $(x, y) \mapsto \|x\|_E\|y\|_F$ est une norme sur $E \times F$.

Cas général : on montre l'existence de $K > 0$ tel que

$$\forall X \in E^n, \ \|u(X)\| \leq K \prod_{i=1}^{n} \|X_i\|$$

□

Théorème 14.

Soient $(E, \| \ \ \|_E)$, $(F, \| \ \ \|_F)$, $(G, \| \ \ \|_G)$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimensions finies**
Toute application bilinéaire en dimension finie $u \in \mathcal{B}il(E \times F, G)$ est continue sur $E \times F$.

exemple 10. Soit E e.v.n. euclidien
Alors $\boxed{c : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), \ (u, v) \mapsto u \circ v \text{ est continue}}$, car bilinéaire en dimension finie.

exemple 11. Soit E e.v.n. euclidien (i.e. réel, de dimension finie), muni du produit scalaire $< \ | \ >$.
Alors $\boxed{< \ | \ >: E \times E \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto < x|y > \text{ est continue}}$, car bilinéaire en dimension finie.

exemple 12. Soit E e.v.n. euclidien
Alors $\boxed{p : \mathbb{R} \times E \to E, \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \text{ est continue}}$, car bilinéaire en dimension finie.

exemple 13. C'est le cas du déterminant !

IV.4 Continuité des applications polynomiales

Définition 12.

On appelle application polynomiale toute application de la forme $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=0^d} (\sum_{i_1+\cdots+i_n=j} a_{i_1,\ldots,i_n}) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$.

Théorème 15.

Toute application polynomiale $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration :
Toute fonction monome $M : (x_1, \ldots, x_n)$ est un produit de fonctions continues, donc est continue. □

Programme PC :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes : rappels et complements	
Parties convexes.	Convexité des boules.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
Point intérieur à une partie. Partie ouverte. Point adhérent à une partie. Partie fermée. Intérieur, adhérence, frontière.	 Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère sont des fermés. Seules les définitions sont au programme. Ces notions sont illustrées par des figures.
e) Limite et continuité en un point	
(ch. Topo) Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée. Opérations algébriques sur les limites	

Contenus	Capacités & commentaires
Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties convexes.	 Convexité des boules.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.	Résultat admis.
f) Continuité sur une partie	
Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne. Continuité des applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemple du déterminant.