Théorème

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, un intervalle, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$.

i. $F : \left\{ \begin{array}{l} [a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

ii. Pour toute primitive F de f sur $[a;b]$, pour tout $x \in [a;b]$ on a $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

Démonstration

i. $\underline{F \text{ est continue sur } [a;b]}$ car, pour tout $x_0 \in [a;b]$, on a :

$$\lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = \lim_{x\to x_0} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, f est bornée sur $[a;b]$: $\forall t \in [a;b]$, $-M < f(t) < M$ pour un certain $M > 0$. Il suit :

$$\forall x \in [a;b],\ \int_{x_0}^x -M\ \mathrm{d}t < \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t < \int_{x_0}^x M\ \mathrm{d}t \iff -M(x-x_0) < \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t < M(x-x_0)$$

En passant à la limite pour $x \to x_0$ et, avec le Théorème des Gendarmes, on a $\lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = 0$.

Remarque : il y a une erreur dans ce qui est ci-dessus. Trouvez-la et corrigez-la *(1 pt pour le premier à y parvenir)*. Pour prouver i., on peut se limiter à ce qui suit :

$\underline{\text{Prouvons à présent que } F \text{ est dérivable sur } [a;b] \text{ et } F' = f.}$

Soit $x_0 \in [a;b]$, on veut établir que $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. On a, $\forall x \in [a;b]\backslash\{x_0\}$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t - (x-x_0)f(x_0)\right) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t.$$

Il suit que $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\ \mathrm{d}t$.

Or, f étant continue en x_0 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ |x-x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$.

On a donc $|x-x_0| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon$.

Il suit que $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = 0$.

F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et, comme f est continue sur $[a;b]$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.

$\underline{\text{Reste à voir que } F \text{ est l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } a.}$

Il est clair que $F(a) = 0$. Supposons que G soit une autre primitve de f qui s'annule en a. On a $G - F$ qui est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $[a;b]$, il suit que c'est une fonction constante sur $[a;b]$. Comme $(G-F)(a) = 0$, on a $G - F = 0 \iff G = F$ et F est bien l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

ii. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On a : $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K$ pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K - \left(\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t\ +\ K\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$