Retour sur l'exercice 2 des Savoirs-faire du Chapitre 8.

1. En utilisant la définition, démontrer que : $\frac{n+2\sin n}{n^2+\cos n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   On veut montrer que : $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \;/\; \forall n\in\mathbb{N},\; n\geq N \Longrightarrow \left|\dfrac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right| \leq \varepsilon.$

   Version 1 : on se débarasse de la valeur absolue d'abord.
   Soit $\varepsilon>0$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\; n+2\sin n$ et $n^2+\cos n$ qui sont positifs et donc :

   $$\left|\frac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right| \leq \varepsilon \iff n+2\sin n \leq \varepsilon n^2+\varepsilon\cos n \iff \frac{1}{\varepsilon}+\frac{2\sin n}{\varepsilon}-\frac{\cos n}{n} \leq n$$

   En remarquant que, $\frac{1}{\varepsilon}+\frac{2\sin n}{n\varepsilon}-\frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{\varepsilon}+1$ on déduit qu'en posant $N=\lfloor\frac{3}{\varepsilon}+1\rfloor+1$, on a $N\leq n \implies \frac{1}{\varepsilon}+\frac{2\sin n}{\varepsilon}-\frac{\cos n}{n}\leq n$ et donc $N\leq n \implies \left|\frac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right|\leq\varepsilon.$

   Version 2 : on se débarasse des fonctions trigonométriques d'abord.
   Soit $\varepsilon>0$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\},\; \left|\dfrac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right| = \dfrac{|n+2\sin n|}{|n^2+\cos n|} \leq \dfrac{n+2}{n^2-1} \leq \dfrac{1}{n-2}.$
   Il suit que $\dfrac{1}{n-2}\leq\varepsilon \implies \left|\dfrac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right|\leq\varepsilon$. Or, $\dfrac{1}{n-2}\leq\varepsilon$ est vrai dès que $n\geq\lfloor\frac{1}{\varepsilon}+2\rfloor+1$.
   En posant $N=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}+2\rfloor+1$ on a bien $N\leq n\Longrightarrow\left|\frac{n+2\sin n}{n^2+\cos n}\right|\leq\varepsilon.$

2. Prouver qu'une suite convergente est bornée.
   Soit u une suite qui converge vers un réel ℓ. D'après la définition :

   $$\forall\varepsilon>0,\; \exists N\in\mathbb{N} \;/\; \forall n\in\mathbb{N},\; n\geq N \Longrightarrow u_n\in[\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon]$$

   Soit donc, pour $\varepsilon=1$ un N qui convient : $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N\Longrightarrow u_n\in[\ell-1;\ell+1]$. Les termes de la suites sont donc de deux types :
   — les N premiers dont on ne sait rien ;
   — tous les suivants qui sont dans $[\ell-1;\ell+1]$.
   On en déduit que $\max(u_0,\dots u_{N-1},\ell+1)$ est un majorant de u et que $\min(u_0,\dots u_{N-1},\ell-1)$ est un minorant de u. La suite u est donc bornée.