PSI
MATHEMATIQUES
Eté 2020

Planning de révisions en Math pour une rentrée et une année en PSI en toute sérénité

Prévoir quatre semaines à raison de trois heures quotidiennes pour ces révisions et le devoir demandé

1 Les Cours à réviser

Nous débuterons l'année par un chapitre de compléments d'algèbre linéaire, puis très vite nous poursuivrons avec les séries numériques. Je vous demande donc de revoir sérieusement vos cours et TD sur **espaces vectoriels, espaces vectoriels de dimension finie, applications linéaires, matrices et déterminants, suites, séries numériques**.

Tout au long de l'année, nous aurons à utiliser les complexes, les dérivés, les développements limités, les formules trigonométriques : il faut donc les revoir impérativement et savoir les utiliser. Pour ce faire, revoir les chapitres d'analyse sur complexes, limites, continuité, dérivabilité, développements limités et pour les formules trigonométriques, elles doivent être dans le chapitre sur les complexes.
Je vous donne également un formulaire de calculs où sont regroupés dérivés, primitives, développements limités, formules trigos à connaître absolument. Le dernier paragraphe concerne un chapitre qui sera vu ultérieurement. Car ce formulaire sera à consulter tout au long de l'année.

2 Premier Devoir Libre Obligatoire, à rendre le 4 Septembre 2020

Une fois vos cours précédents revus, vous pourrez traiter le devoir suivant. A vous d'aller chercher dans vos cours, TD, Devoirs déjà faits les méthodes et idées pour avancer dans la résolution de ces exercices.
Vous faites ce que vous pouvez ! mais faites ! ! ! ! Il est inacceptable de ne rien faire ou presque. Il faut toujours au moins passer 10h sur ces sujets et pour un devoir libre, on y passe deux heures puis on y revient le lendemain avec de nouvelles idées car cela a cogité la nuit pendant le sommeil ! ou on se rappelle de quelque chose qu'on va vérifier dans son cours ou TD.... Ce sont des méthodes de travail à adopter. Il ne faut pas attendre que cela tombe tout cuit dans le bec !
Pour toute question, vous pouvez me joindre à d.zarouf@cpge-brizeux.fr

Exercice 1. Calculs divers

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 5 de $f : x \longmapsto \tan x\,(\cos x)^x - \dfrac{x^2}{(\cos x)^2}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$.
3. Calculer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^{\pi} cos(nt)\sin(mt)\,dt$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt$.
5. Calculer $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 t^n(\ln(t))^p\,\mathrm{d}t$.
6. Montrer que $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.
8. (a) Justifier qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh} t = 1$.
   (b) Que vaut $\operatorname{ch} t$?
   (c) En considérant $\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t$, montrer que $t = \ln(1+\sqrt{2})$.
9. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)} = e^{2i\theta}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue u : $u^n = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$.
   (c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation suivante, d'inconnue z :
   $$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$$

Exercice 2. Algèbre Linéaire

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{U}$. On désigne par I_3 la matrice identité.

1. (a) Soit $x \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{U}$. Donner $f(x)$ dans la base $\mathcal{U}$.
   (b) Donner le rang de f.
   (c) Déterminer une base de l'image et du noyau de f en utilisant uniquement sa matrice.
   (d) Déterminer $\det(XI_3 - A)$. Montrer qu'il s'agit d'un polynôme dont on donnera le degré et ses coefficients.
   (e) Déterminer ses racines que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (f) Montrer que , pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_3) = \operatorname{Vect}(v_i)$ où v_i est tel que sa première composante soit égale à 1.
   (g) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

2. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite.
   Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Donner a_1, a_2 et a_3.
   Ecrire une fonction en langage python rentrant n et retournant a_n.
5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) On note g l'endomorphisme de $vect(u_1, u_2)$ tel que sa matrice dans (u_1, u_2) soit B. Déterminer un vecteur X_1 non nul de $vect(u_1, u_2)$ tel que $g(X_1) = -X_1$ et un vecteur X_2 non nul de $vect(u_1, u_2)$ tel que $g(X_2) = 2X_2$.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice Q inversible telle que $B = Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$.
   (d) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.
   (e) Pour tout entier strictement positif n, calculer B^n en fonction de n.
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 3. Séries Numériques

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$.
2. En revenant à la définition d'une série numérique convergente, démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
3. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \leq 1, n^\alpha \leq n$
   (b) En déduire que : $\forall \alpha \leq 1, \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
4. Soit $\alpha > 1$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{n^\alpha}$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$
   (c) Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
5. Quel résultat du cours sur les séries numériques venez-vous de redémontrer ?

6. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

   (a) Etablir que la série de terme général u_n converge.

   (b) On souhaite déterminer sa somme.

      i. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \arctan(n+1) - \arctan(n) \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$

      ii. Etablir que $\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \tan(u_n)$.

      iii. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.