Devoir Libre $n°3$
PSI
MATHEMATIQUES

1 à rendre le 30 Septembre 2022

Problème I : Autour des polynômes d'interpolation de Lagrange

$\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Dans chaque partie suivante, vous devrez à un moment donné, utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ convenablement choisie (n sera également à choisir) et utiliser les propriétés vues en cours .

1. Déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P(-1) = 1, P(2) = -1, P(4) = 3, P(10) = 2$$

.

2. Soit P de degré n tel que, pour tout $k \in \{1..n+1\}$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculer $P(n+2)$. *Indication : faire intervenir les polynômes de lagrange associés à $\{1..n+1\}$ et exprimer $L_k(n+2)$ en fonction de $\begin{pmatrix} n+2 \\ k \end{pmatrix}$.*

3. Soit n un entier naturel et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts**.
Soit E l'espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Déterminer un supplémentaire dans E du sous espace vectoriel F suivant :

$$F = \{f \in E / \forall i \in \{0..n\}, f(a_i) = 0\}$$

.

4. Soit n un entier naturel et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts** . On note $\mathcal{B}_0 = (X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B} = (L_i)_{i \in \{0..n\}}$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associés .

- **a.** Soit A la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
  - i. En utilisant les coordonnées d'un polynôme dans la base $\mathcal{B}$, donner l'inverse de A et en déduire $\det(A)$.
  - ii. Justifier que $1 = \sum_{j=0}^{n} L_j$.
  - iii. En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1 et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est égale à 0.
- **b.** Pour $m \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose : $s_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^m L_k(0)$.

  Calculer s_m.
- **c.** Dans cette question, Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(a_i) L_i$.
  - i. Montrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles à préciser.

ii. on pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{n+1} L_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{n+2} L_k(0)$.

A. Déduire de la question précédente que $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} a_k$.

B. Calculer s_{n+2} en fonction de $n, \sum_{k=0}^{n} a_k, \prod_{k=0}^{n} a_k$.

d. (Question facultative) Dans cette question, Q est un polynôme unitaire (c'est à dire de coefficient dominant égal à 1) de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal n.
On suppose de plus que $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ sont des entiers relatifs vérifiant

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

Pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on note $b_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (a_k - a_j)$.

i. Prouver que : $|b_k| \geqslant k!(n-k)!$.

ii. Déduire de 1.5.(c) que $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(a_k)}{b_k} = 1$.*penser aux coefficients dominants*

iii. On définit M par $M = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{max} |Q(a_k)|$. Démontrer que $M \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

2 à rendre le 7 Octobre 2022

Exercice

Chacun me rédige une question
Montrer que $\left(\frac{(n^2+1)(n!)^2}{(2n)!}\right)$ converge vers 0

1. En utilisant la formule de Stirling

2. En utilisant la règle de D'Alembert.

Problème II : Déterminant des matrices circulantes

On donne, pour $n \in N^*$, n réels $(a_1, \cdots, a_n)$ et :

- la matrice circulante droite $D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$

- la matrice circulante gauche $G_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

- $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Soit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$V_z = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k^n$ et en déduire : $\forall k \in \{1..n\}, \forall j \in \{1..n\},\ \dfrac{1}{\theta_k^j} = \theta_k^{n-j}$.

2. Vérifier que :$\forall k \in \{1..n\}$

$$D_n V_{\theta_k} = \begin{pmatrix} P(\theta_k) \\ \theta_k P(\theta_k) \\ \theta_k^2 P(\theta_k) \\ \vdots \\ \theta_k^{n-1} P(\theta_k) \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice de Vandermonde $V_n(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ (sa j ième colonne est V_{θ_j}).Notons-la V_n.

Calculer $D_n V_n$ et en déduire $\det(D_n)$.

4. Calculer JD_n et $\det(J)$ puis en déduire $\det(G_n)$.

5. Application :

a. i. Calculer, pour tout $x \neq 1, P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

ii. En déduire pour tout $x \neq 1, Q(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

b. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$.

c. En considérant que, pour tout $j \in \{1, ..n\}$, $\theta_j - 1$ sont les racines du polynôme $(X+1)^n - 1$ et en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, montrer que $\prod_{j=2}^{n} (\theta_j - 1) = (-1)^{n-1} n$.

d. Déduire de ce qui précède

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Puis retrouver le résultat en le calculant par une autre méthode.