Devoir Libre $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
A rendre le 10 Novembre 2022

Vous avez le choix entre deux sujets : Niveau I type e3A/CCINP ou Niveau II type Mines / Centrale.
Niveau I : Exercices 1-2-3-4-6.
Niveau I : Exercices 1-2-3-5-7 et ex 4 facultatif

1 Calculs

Exercice 1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions suivantes :

1. $x^3 - 1$.
2. $x^3 + 1$.
3. $3x + 3 - (x + 1)^2$.
4. $-6(x^2 - 9) + (2x - 1)(x + 3)$.
5. $3(7x + 1)(4 - 2x) + (5 - x)((3x + 4)^2 - (4x - 3)^2)$.
6. $18x^2 + 48x + 32$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x^n - 1 - (x - 1)(x + 2)$.
8. $x^2(x^2 - 1) - 2x^2 + 2$.

A aucun moment, on doit développer ! Penser plutôt à des factorisations partielles : par exemple $x - 3 - 2ax^2 + 18a = (x - 3) - 2a(x^2 - 9) = (x - 3)(1 - 2a(x + 3))$

Exercice 2. Calculer :

1. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\, e^x \, dx$.
2. calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos(x)}$ en faisant le changement de variable $u = \tan\dfrac{x}{2}$: vous devez démontrer que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(x^7 + 1)}$.

   (Remarquer que $\dfrac{1}{x(x^7 + 1)} = \dfrac{x^6}{x^7(x^7 + 1)}$ et faire un changement de variable).
5. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(t) \cos^5(t) \, dt$. (écrire $\cos^5(t) = \cos^t(\cos^2 t)^2$).

si besoin, revoir méthodes d'intégration vues en Première Année.

2 Séries Numériques

Exercice 3. On définit : $\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch} \frac{1}{\sqrt{n+k}} - n.$

1)Donner le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de $\frac{1}{\sqrt{2n+2}}$, puis celui de $\mathrm{ch}\frac{1}{\sqrt{2n+2}}$.

2)Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \mathrm{ch}\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \mathrm{ch}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \mathrm{ch}\frac{1}{\sqrt{n}} - 1$ et donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en $+\infty$.

3)En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4. Le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$
2. Etablir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0, \pi]$:
$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}$$
   Puis
$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$
3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .
   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t)\, dt = 0.$
4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$.
   Montrer, en citant avec précision le théorème utilisé, que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. (*Utiliser le théorème limite de la dérivée vu en PCSI*).
5. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$
6. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
7. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. (*Utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 14 feuille TD séries numériques*).
8. Est-ce que le signe du résultat obenu pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est cohérent avec un théorème sur les séries alternées.
9. Déterminer une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ à 10^{-3} près.

Exercice 5. A la suite de nombres réels $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on associe les suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k) \text{ et } Q_n = \prod_{k=0}^{n} (1+u_k).$$

1. On suppose que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (a) Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) En prenant $u_k = \frac{1}{k}$, montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que u_k est positif ou nul pour tout k et que la série de terme général u_k converge.
   (a) Etudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on pourra utiliser la fonction logarithme népérien. Montrer que, si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, l'un au moins des termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est égal à 1.
   (b) Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose toujours les u_k tous positifs ou nuls, mais on suppose que la série de terme général u_k est divergente.
   (a) Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Lorsque de plus tous les u_k sont strictement inférieurs à 1, calculer la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On suppose désormais que les u_k sont de signe quelconque mais que la série de terme général u_k n'est pas absolument convergente.
   Etudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que, si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, l'un au moins des u_k est égal à -1.
5. On suppose désormais que les u_k sont de signe quelconque mais que la série de terme général u_k est convergente.
   (a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est non nulle.
   (b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
6. Dans le cas particulier où u_0 est égal à 1 et où u_k est égal à $-\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 1, étudier la convergence de la suite associée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On sera amené à faire un développement limité de* $\ln(1+u_k)$.

3 Eléments propres

Exercice 6. *On pourra s'inspirer d'exemples du cours*

1. Déterminer les éléments propres de : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $M^2 + M = A$.

Exercice 7. On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{i,i} = 2, a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon c'est-à-dire la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$$

Le but de cet exercice est de trouver les éléments propres de A :

1. Calculer le déterminant de A. *On pourra raisonner par récurrence.*
2. On considère $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A associée à un vecteur propre
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}).$$
   (a) Justifier que :
   - $\exists i \in \{1..n\}, x_i \neq 0$.
   - – $(2-\lambda)x_1 + x_2 = 0$.
     – $\forall i \in\in \{2..n-1\} x_{i-1} + (2-\lambda)x_i + x_{i+1} = 0$.
     – $x_{n-1} + (2-\lambda)x_n = 0$.

   (b) Justifier qu'il suffit de trouver les suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :
   $x_0 = x_{n+1} = 0$ et $\forall k \geq 1, x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$.
   pour en déduire les vecteurs propres associés à $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.

   On considère désormais l'équation dans $\mathbb{C}$:$z^2 + (2-\lambda)z + 1 = 0$ et on note u et v ses deux racines complexes.
   On suppose dans un premier temps qu'elles sont distinctes.

   (c) Justifier que : $u + v = \lambda - 2, uv = 1, v = \overline{u}$.

   (d) Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie en 2.
      i. Justifier qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $(\alpha, \beta) \neq 0$ et $\forall k, x_k = \alpha u^k + \beta v^k$.
      ii. Etablir que $u^{2(n+1)} = 1$ et $v = \overline{u}$.
      iii. Montrer qu'on peut choisir $u = e^{\frac{pi\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{0..n\}$ et $v = e^{\frac{-pi\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$.

iv. En déduire les éléments propres de A. Compter le nombre de valeurs propres obtenues. Montrer qu'elles sont toutes réelles.

v. Pour quelle raison n'est-il pas nécessaire de traiter le cas $u = v$ pour étudier les éléments propres de A.

(e) Donner le polynôme caractéristique de A.

(f) Que vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \cos^2\left(\frac{j\pi}{2n+2}\right)$?