**Devoir Libre $n°5$**
**PSI**
**MATHEMATIQUES**
**A rendre le 2 Décembre 2022**

Vous avez le choix entre deux sujets : Niveau I type e3A/CCINP ou Niveau II type Mines / Centrale.

# Sujet Niveau I

## Exercice

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 0, f(1) = \ln(2),\ \forall x \in ]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

Puis pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.

1. Justifier l'existence de $J(x)$ et le calculer .
2. Montrer, en mettant $f(x) - x\ln 2$ et $x^2\ln 2 - f(x)$ sous forme d'intégrales, que :
$$\forall x > 1, x\ln 2 \leq f(x) \leq x^2\ln 2$$
3. Obtenir un encadrement analogue au 2 pour $x \in ]0,1[$.
4. Montrer la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
6. Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
7. Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
8. Donner l'allure de la représentation graphique de $f$.

---

## Problème

**Question préliminaire**

Soit $a$ un réel non nul
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout $x$ réel associe le nombre complexe $\frac{1}{x+ia}$ où $i$ vérifie $i^2 = -1$.

**Dans tout le problème, $\lambda$ est un réel strictement positif**

Pour tout réel $\alpha$ et tout réel $\lambda > 0$, on définit l'application $f_{n,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto t^\alpha e^{-\lambda t}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $A$ des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\lim_{t\to 0, t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.
   (b) Déterminer l'ensemble $B$ des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)dt$ converge.

2. Montrer que pour tout $x$ réel, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.
   On définit alors les deux fonctions $U$ et $V$ sur $\mathbb{R}$ par

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt$$

   et

$$V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt.$$

3. Étudier les parités des fonctions $U$ et $V$.
4. A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.
   On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. Pour tout réel $t$, on note $g(t) = f_{-1/2,\lambda}(t)\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\lambda t}\sin(t)$. Montrer que $g$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt$.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel $n$, $a_n = \int_0^{\pi} \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)dt$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ que l'on déterminera.
7. (a) Justifier que la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k a_k$ converge. On note $S$ sa somme.
   (b) Montrer que $S > 0$.
   (c) En utilisant la somme partielle d'ordre $N$ de la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k a_k$, montrer que l'on a : $\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$.
8. A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$..

# Sujet Niveau II

**Exercice**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0)=0, f(1)=\ln(2),\ \forall x\in ]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$

Puis pour $x>0$ et $x\neq 1$, on pose $J(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$.

1. Justifier l'existence de $J(x)$ et le calculer .
2. Montrer, en mettant $f(x)-x\ln 2$ et $x^2\ln 2-f(x)$ sous forme d'intégrales, que :
$$\forall x>1, x\ln 2\leq f(x)\leq x^2\ln 2$$
3. Obtenir un encadrement analogue au 2 pour $x\in ]0,1[$.
4. Montrer la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
6. Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
7. Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
8. Donner l'allure de la représentation graphique de $f$.

---

**Problème**

**Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorque ce n'est pas explicitement demandé.**

## I. Préliminaires.

Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t\in ]-1,+\infty[,\ \ln(1+t)\leq t \tag{1}$$

$$\forall t\in ]0,+\infty[,\ t\ln(t)\geq -\frac{1}{e} \tag{2}$$

## II. Construction d'une application particulière.

On note $H$ l'ensemble des fonctions $f$ strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho>0$ (dépendant de $f$) tel que, pour tout réel $x$ :

$$0<f(x)\leq\frac{1}{\rho}\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\rho\right)x^2\right) \tag{A}$$

On note $H_0$, le sous-ensemble de $H$ des fonctions $f$ telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-u^2/2}\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}\,du=\sqrt{2\pi}$$

Dans tout le reste de l'énoncé, $f$ est un élément de $H_0$

3. Soit $F_f$ définie par
$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\, du$$
En particulier,
$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$
Montrer que $F_f$ est $C^1$ bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left]0, \sqrt{2\pi}\right[$. Calculer $\left(F_f^{-1}\right)$.
4. Montrer qu'il existe une unique fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel $x$, on ait
$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$
5. Montrer que $\varphi$ est strictement monotone et que $\varphi$ est $C^1$, et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que $\varphi^{-1}$ est aussi $C^1$ sur $\mathbb{R}$
6. Pour tout réel $x$, calculer
$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2$$
et
$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) + \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2$$
7. Soit $h$ une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du$$
8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :
$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\, du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$$
9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :
$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$
10. Déterminer une primitive de la fonction
$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$
11. Calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\, du$$

# III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :
$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\, du$$
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\, du$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.
13. Montrer l'identité :
$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\,du$$
14. Montrer l'égalité suivante :
$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2}\,du \tag{3}$$
15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$ ?
16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

FIN DU PROBLEME

*Le problème du transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses* $u-du$ *et* $u+du$ *est donné par* $2\exp(-u^2/2)du$. *On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique* $f(u)exp(-u^2/2)$. *Cela est représenté par une application* $s$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui pour tout réel* $u$ *donne l'abscisse,* $s(u)$, *du grain situé en* $u$ *après le transport. On montre que l'application* $\varphi$ *déterminée en question 4 minimise le coût du transport défini par* $\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|e^{-u^2/2}\,du$, *parmi toutes les fonctions* $s$ *possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de* $f$ *et qui ne nécessite pas le calcul de* $\varphi$. *Le nombre* $E(f)$ *est appelé l'entropie de Boltzmann.*