Problème 1 *Analyse*

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
   Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D'.
4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE II :

Dans la suite. on s'intéressera à l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes
$P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$
et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{X^3}{3^2} - \dfrac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$

1. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
2. Justifier : $\forall t \in [0,1]\,,\quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$
3. En déduire : $\forall x \in [0,1]\,,\quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in [0,1]\,,\quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

4. Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in [0,1]\,,\quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
5. Comparer pour tout $x \in \left]0,1\right]$: $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$
6. En notant ,g_n l'application définie pour tout $x \in \left]0,1\right]$ par $g(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :
   $$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$
7. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable $]0,+\infty[$
2. Calculer , $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.
5. En utilisant la formule de Leibniz calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n.
   On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de x^k $(k \in \mathbb{N})$ de ce polynôme
   Vérifier cette expression pour $n = 2$