I. Révisions d'analyse

Exercice 1 *Suite*

Soit $c > 0$ fixé.

1. Rappeler le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Déterminer deux constantes a_0, a_1 réelles telles que :
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} a_0 + a_1\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. EN mettant la puissance sous forme exponentielle, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \mathrm{e}^c$

Exercice 2 *Limites*

Soit $x \geq 0$ fixé.

1. pour $x < 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^n + x^{2n}}$
2. pour $x = 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^n + x^{2n}}$
3. pour $x > 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^n + x^{2n}}$

Exercice 3 *Primitivation*

1. Ensemble de définition et dérivée de $a : x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
2. Pour $x > 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.
3. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(E) \quad y'(x) = \dfrac{\ln x}{x} y(x)$, en précisant l'ensemble des solutions.

Exercice 4 *Complexes et primitivation de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+ax+1}$*

1. Factoriser $X^2 + 3X + 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer en élements simples $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$
3. En déduire une primitive explicite F sur $]-1, +\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$
4. Donner une primitive F sur $]-\infty, -2[$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

II. Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 5 *Polynômes*

Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d, avec $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$, on peut évaluer P en $Q \in \mathbb{R}[X]$ en posant $P(Q) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^k \in \mathbb{R}[X]$.

Dans le cas particulier $P = X^0$, on obtient alors $Q^0 = 1$, le polynôme constant égal à 1, quel que soit Q.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ entier fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$ et $Q = (X+1)$, calculer $P_k(Q)$.
   On explicitera $P_0(Q)$ et $P_1(Q)$
2. A-t-on $P_k(Q) = P_k \times Q$, pour les polynômes précédents ?

Exercice 6 *Matrice d'une application linéaire sur les polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la matrice M dans la base canonique de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P(X+1) - P(X)$$

on explicitera la dernière colonne C_{n+1} de M à l'aide de coefficients binomiaux ou de factorielles.

Exercice 7 *Image et noyau pour une projection orthogonale*

Soit p le projecteur de $E = \mathbb{R}_2[X]$ sur $D = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$ parallèlement à $P = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Justifier que D et P sont en somme directe.
2. D et P sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Calculer $p(1), p(X), p((X-1)^2)$, donner la matrice D de p dans la base $(1, X, (X-1)^2)$ de E.
4. En remarquant que $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, calculer $p(X^2)$, puis donner la matrice M de p dans la base canonique.
5. Calculer $\mathrm{rg}(M)$, $\mathrm{tr}(M)$.

Exercice 8 *Interpolation*

Soit $n \in \mathbb{N}$. *si vous êtes perdu(e) avec n, essayez $n = 2$*

On pose $x_k = k$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et $L_k = \prod_{0 \leq j \leq n; j \neq k} \frac{(X-j)}{(k-j)}$.

1. Justifier que $\deg(L_k) = n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. Justifier que $L_k(k) = 1$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. Justifier que $L_k(j) = 0$, pour tous $j, k \in [\![0, n]\!]$ avec $j \neq k$.
4. Démontrer que $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que les polynômes $P = 1$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} L_j$ coïncident en tous les entiers de $[\![0, n]\!]$, en déduire que

$$1 = \sum_{j=0}^{n} L_j$$

Exercice 9 *Image et noyau pour une projection*

On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, $D = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$ et $H = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Justifier que D et H sont en somme directe.
2. D et H sont-ils supplémentaires dans E ?
3. On note p le projecteur sur D parallèlement à H.
   Représenter sur un dessin cette projection.
4. Calculer $p(1), p(X), p((X-1)^2)$, donner la matrice D de p dans la base $(1, X, (X-1)^2)$ de E.
5. En remarquant que $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, calculer $p(X^2)$, puis donner la matrice M de p dans la base canonique.
6. Calculer $\mathrm{rg}(M)$, $\mathrm{tr}(M)$.

III. Révisions de calculs

Exercice 10 *Sommes géométriques*

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $(a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}\right)$
2. Proposer une factorisation de $a^5 - 1$ par $a - 1$.
3. En déduire une factorisation de $1 + X + X^4 + X^3 + X^4$ à l'aide de $X - \omega$, $X - \omega^2$, $X - \omega^3$, $X - \omega^4$, où $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$

Exercice 11 *Sommes géométriques*

Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (-1)^k x^k$. *on vérifiera que* $S_N(0) = 0$.
2. Calculer $S_N(x) + S_N(-x)$

Exercice 12 *Relation de récurrence*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{2(p+1)}$ à l'aide de p et u_{2p}.
2. Démontrer que
$$\forall P \in \mathbb{N},\ u_{2P} = u_0 \times \prod_{k=0}^{P-1} \frac{2k+1}{2k+2}$$
3. Démontrer que :
   $\forall P \in \mathbb{N},\ \displaystyle\prod_{k=0}^{P-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2^{2P}} \times \frac{(2P)!}{(P!)^2}$
4. En déduire les expressions en fonction de $P \in \mathbb{N}$ de u_{2P} et u_{2P+1}

IV. Révisions de probabilités et dénombrement

Exercice 13 *Définitions de cours au hasard et révisions d'été : dénombrement*

Rappeler la définition de deux évènements indépendants, et deux évènements incompatibles.
On tire un dé à 6 faces, on note A l'évènement « le résultat est pair »et B l'évènement « le résultat est cinq ».
A et B sont-ils indépendants ?
A et B sont-ils incompatibles ?

Exercice 14 *Probas totales et var*

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On tire N fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès « Face »obtenus.

On effectue alors X nouveaux tirages de la pièce et l'on note Y le nombre de succès obtenus dans la deuxième série de lancers.

1. Donner la loi de X (on précisera son image $X(\Omega)$ et les probabilités correspondantes).
2. Justifier que $Y \leq X$ et donner $Y(\Omega)$.
3. Pour $k, j \in [\![0, N]\!]$, justifier que $\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) = 0$ si $j > k$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Soit $j \in [\![0, N]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(Y = j)$ en appliquant la formule des probabilités totales au système complet $(\{X = k\})_{0 \leq k \leq N}$.