Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand a_n et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.
3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2, c_3.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1, 1],\ c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.
5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.
6. Prouver que pour tout n, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie II.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

   1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.
   Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

   1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.
   Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
   Calculer $I_{p,p}$.

   1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ définie en partie **I** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

   1.d. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   1.e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des réels et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   2.a. Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que l'on a $P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k$.

   2.b. Calculer b_n.

   2.c. Montrer que l'on a $\|P\|^2 \geq \dfrac{\pi}{2} b_n^2$.

   2.d. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$