Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$, dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de M ? En déduire la dimension de $H = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Où lit-on que $f(X^2) = X^2 + X^3$? Déterminer $f(1)$ et $f(X^3)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f) = G$.
4. La somme $H + G$ est-elle directe ? Si oui, H et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Problème 1

Partie A

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ?
   Exprimer alors $\det\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses des matrices
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ;$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})\,;\ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.
   Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi,un élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
   Justifier alors que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
   On notera désormais $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, constitué des matrices telles que $\det(M) = 1$.
4. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Partie B

On désignera par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p, non nul, vérifiant $A^p = I_2$.

Pour chaque matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on remarque que l'ensemble des entiers naturels non nuls k tels que $A^k = I_2$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide, donc admet un plus petit élément q non nul tel que $A^q = I_2$; il sera appelé ordre de la matrice A et noté $h(A) = q$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = q$.

1. Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$,
   En déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.
2. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.

La suite n'est accessible qu'aux 5/2 (chapitre sur la réduction)

3. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres complexes, éventuellement confondues, de A. Montrer qu'elles sont de module 1.
4. Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace $\mathrm{Tr}(A)$ de la matrice A.
5. En déduire que $\operatorname{tr} A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
6. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. La matrice produit CD appartient-elle à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
7. Exprimer le polynôme caractéristique χ_A de A à l'aide de $\operatorname{tr} A$ et $\det A$.
8. Vérifier alors qu'il y a 10 polynômes caractéristiques possibles ; en utilisant la question B.3, vous exclurez 4 de ces cas.
9. Dans les 6 cas restants, montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et déterminer l'ordre de A.
10. En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier naturel p_2 tel que :

$$\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}),\ A^{p_2} = I_2$$