I. Révisions d'analyse

Exercice 1 *Intégrales « de Bertrand »*

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $f_{\alpha,\beta} : x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

On cherche à déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale généralisée $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Justifier que la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est continue sur $J = [3, +\infty[$.
2. Quel est le signe de la fonction $f_{\alpha,\beta}$ sur $J = [3, +\infty[$?
3. Cas $\alpha > 1$
   (a) Montrer que $1 < \dfrac{1+\alpha}{2} < \alpha$. On note alors $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$.
   (b) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$?
   (c) Justifier par un calcul de limites que $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$.
   (d) Conclure que $I(\alpha, \beta)$ converge (ou existe) pour tout $\alpha > 1$ et β quelconque.
4. Cas $\alpha = 1$
   (a) A l'aide d'un changement de variables généralisé, montrer que $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u$ converge.
   (b) Conclure que $I(1, \beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
5. Cas $\alpha < 1$
   (a) Montrer que $1 > \dfrac{1+\alpha}{2} > \alpha$. On note alors $\delta = \dfrac{1+\alpha}{2}$.
   (b) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^\delta}\,\mathrm{d}t$?
   (c) Que vaut $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \int_3^B \frac{1}{t^\delta}\,\mathrm{d}t$?
   (d) Justifier par un calcul de limites qu'il existe un réel $t_0 \geq 3$ tel que :
   $$\forall t \geq t_0,\ f(t) \geq \frac{1}{t^\delta}$$
   (e) Conclure que $I(\alpha, \beta)$ diverge pour tout $\alpha < 1$ et β quelconque.
6. Représenter $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; I(\alpha, \beta)\}$ converge, et placer sur le dessin les points $(2, 0)$, $(1, 2)$ $(1/2, 0)$.