Exercice 1

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^a}.$$

On note I_a et J_a les intégrales généralisées : $I_a = \displaystyle\int_0^1 f_a(t)\ \mathrm{d}t$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_a converge pour $a < 2$. Qu'en est-il pour $a \geq 2$?
2. Soit $a > 1$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_a(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.
3. (a) Soit $X > 1$, montrer que :

$$\int_1^X f_a(t)\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire la nature de J_a lorsque $a \in]0, 1]$.
4. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Exercice 2

On pause, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

1. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n u_n$?
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$?
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} u_n$?