Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ sa base canonique.
Soient $a_1, \ldots, a_3$, trois réels vérifiant : $a_1 < a_2 < a_3$.

1. Montrer que l'application : $\tau : P \mapsto \left(P\left(a_1\right), P\left(a_1\right), P\left(a_3\right)\right)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $L_i = \tau^{-1}\left(e_i\right)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par τ est e_i.
   (a) Justifier, sans aucun calcul, que $\mathcal{B}' = (L_1, L_2, L_3)$ est une base de E.
   (b) Comme pour $i \in [\![1, 3]\!]$, $\tau(L_i) = (\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3)$, on remarque que, pour $k \in [\![1, 3]\!]$, on a
   $$L_i(a_k) = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$
   Déterminer en fonction de P et de a_1, a_2, a_3 les composantes (réelles) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ d'un polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i L_i$ quelconque de E, décomposé dans cette base $\mathcal{B}'$.

   Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. **Dans cette question**, on suppose que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   (a) Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ est une droite vectorielle, et en déterminer un vecteur directeur.
   (c) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :
   $$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2.$$