Problème 1 *Séries*

I. Séries et intégrales

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. Pour tout entier N tel que $N \geqslant n_0$, on pose

$$S_N = \sum_{k=n_0}^{N} f(k) = f(n_0) + \ldots + f(N)$$

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$. Montrer que :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

   (b) Déduire de la question précédente que : $S_{N+1} - f(n_0) \leqslant \displaystyle\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_N$, puis que

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_N \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

   (c) Soit $X > n_0$. On note N la partie entière de X, c'est-à-dire l'unique entier vérifiant $N \leqslant X < N+1$. Montrer que :

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$$

   En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N \geqslant n_0}$ converge.

   (d) Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ sont de même nature.

2. Application à la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   (a) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$?

   (b) On pose $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

   (c) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer à l'aide de $(*)$ que : $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

II. Séries de Bertrand.

Dans toute cette partie, α et β sont deux réels, et on pose pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

1. Supposons $\alpha > 1$.
   (a) Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.
   (c) Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.
2. Supposons $\alpha < 1$.
   (a) Donner la limite de nu_n.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$.
   (c) Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$.
3. Supposons $\alpha = 1$.
   Notons, pour tout $t > 1$, $f_\beta(t) = \frac{1}{t \ln^\beta(t)}$.
   (a) Étudier les variations de f_β sur $]1, +\infty[$. Montrer alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que f_β soit décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
   (b) Soit $X > n_0$. Calculer, en distinguant le cas $\beta = 1$, $I_\beta(X) = \int_{n_0}^{X} f_\beta(t)\mathrm{d}t$.
   Donner alors la nature de $I_\beta = \int_{n_0}^{+\infty} f_\beta(t)\mathrm{d}t$ en fonction de β.
   (c) En déduire, à l'aide de **I.**, la nature de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ en fonction de β.
4. À l'aide des résultats de cette partie **II.**, donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que la série $\sum u_n$ converge.

III. Règle de la loupe.

Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^n \text{ termes}}$$

Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \qquad \text{et} \qquad T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$$

On fera attention aux indices de départs de sommation dans S_N et T_N.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il d'entiers i vérifiant : $2^n \leqslant i \leqslant 2^{n+1} - 1$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n \geqslant \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$
3. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$T_N \geqslant S_{2^{(N+1)}-1}$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2} v_{n+1} \leqslant \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$
On pourra commencer par écrire $\dfrac{1}{2} v_{n+1} = 2^n u_{2^{n+1}}$.
5. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2} T_N \leqslant \frac{1}{2} u_1 + S_{2^N - 1}$$
6. À l'aide de **3)** et **5)**, montrer alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
7. Une première application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{(1-\alpha)n}$.
   (b) Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
   (c) À l'aide de **6)**, quel théorème important du cours a-t-on prouvé ?
   On pourra traiter séparément les cas $\alpha \leqslant 0$ et $\alpha > 0$.
8. Une deuxième application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (a) Calculer v_n pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (b) Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge.
   (c) Qu'a-t-on redémontré ?