Problème 1 *La série harmonique*

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. *Question préliminaire*
   Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.
2. *Première méthode*
   (a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:
   $$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$
   (b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. *Deuxième méthode*
   (a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$:
   $$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$
   (b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:
   $$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$
   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
   (c) Etablir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (d) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
   Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.
   En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$ et la formule :
   $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Problème 2 *Etude d'intégrales*

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} \mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera dans la suite.

A - *Cas où la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{P(t)}{t^2+1}$ avec P polynômiale*

(a) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\dfrac{f(t) - f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variables défini par $u = t^2$.
- Déterminer deux réels a et b tels qu'on ait pour tout réel $u \geq 0$:

$$\frac{3}{2(u+1)(4u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1}$$

- En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

La suite du devoir est facultative

(b) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.

- Justifier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(2t)}{t} \mathrm{d}t$, et préciser leurs valeurs.
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

(c) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$.

- En posant $u = t^2$, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{A} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{A} \frac{f(2t)}{t} \mathrm{d}t$, pour tout réel positif A.
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

(d) On suppose ici que $P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, donc que $f(t) = \dfrac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2+1}$.
En exploitant les résultats précédents, justifier la convergence et la valeur de $I(f)$.

(e) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\dfrac{f(t) - f(2t)}{t}$, et étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Que dire de l'intégrale $I(f)$ si l'on suppose que $P(t) = t^n$, donc $f(t) = \dfrac{t^n}{t^2+1}$, avec $n \geq 3$?