0) Question préliminaire : Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que :

$$(1+\alpha)(1+\beta) \geq (1+\alpha+\beta).$$

Exercice 1 *Déterminants*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et, pour tout $n \geq 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.
2. Démontrer que :
$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$
3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k).$$
On pourra utiliser un raisonnement par récurrence que l'entier naturel j.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
   (a) Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geq 1$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq 2} t_n$.
   (c) Prouver alors que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?